Sammlung Göschen



# Geschichte der Mathematik

Neue Bearbeitung von

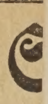
Dr. H. Wieleitner

I

Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts

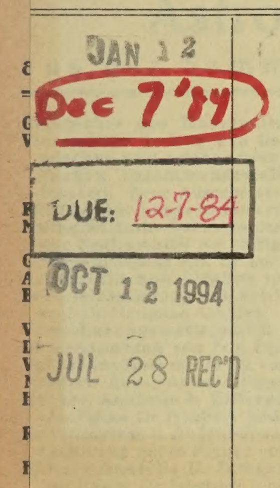



226





Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.



# Bibliothek zur Mathematik und Astronomie

## aus der Sammlung Göschen

**Geschichte der Mathematik** von Prof. Dr. A. Sturm. Nr. 226
**Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Haußner. Nr. 81
**Fünfstellige Logarithmen** von Direktor Prof. Aug. Adler. Nr. 423
**Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik** mit 18 Figuren v. Prof. O.Th. Bürklen. Nr. 51
**Gruppentheorie** von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. Nr. 837
**Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Herm. Schubert. Nr. 47
**Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert . . . . . . . . . . . . . . . Nr. 48
**Versicherungsmathematik** v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180
**Determinanten** von Prof. Paul B. Fischer . . . . . . . Nr. 402
**Vektoranalysis** mit 16 Fig. von Prof. Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354
**Niedere Analysis** mit 6 Figuren von Prof. Dr. B. Sporer. Nr. 53
**Höhere Analysis I: Differentialrechnung** mit 68 Fig. von Rektor Dr. Friedrich Junker . . . . . . . . . . . . . Nr. 87
**Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung** mit 46 Figuren von Rektor Dr. Friedr. Junker. Nr. 146
**Höhere Analysis II: Integralrechnung** m. 89 Figuren von Rektor Dr. Friedrich Junker . . . . . . . . . . . . . Nr. 88
**Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** mit 50 Figuren von Rektor Dr. Fried. Junker. Nr. 147
**Graphische Integration** v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. Nr. 801
**Einleitung in die Funktionentheorie** (Theorie der komplexen Zahlenreihen) v. Oberl. M. Rose. Mit 10 Fig. Nr. 581
**Funktionentheorie** von Prof. Dr. Konrad Knopp.
I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren . . . . . . . . . . . Nr. 668
II. Anwendungen d. Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 10 Figuren . . . . . Nr. 703
**Ebene Geometrie** m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41
**Stereometrie** mit 81 Figuren von Prof. Dr. Robert Glaser. Nr. 97
**Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie** von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren . . . . . . . . Nr. 779
**Ebene und sphärische Trigonometrie** mit 59 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg . . . . . . . . . . . Nr. 99
**Sammlung v. Aufgaben aus d. ebenen u. sphärischen Trigonometrie** mit 26 Fig. v. Studienrat Dr. Fritz Helland. Nr. 848

Sammlung Göschen



# Geschichte der Mathematik

Neue Bearbeitung von

**Dr. H. Wieleitner**

Oberstudienrat des Realgymnasiums Augsburg

## I

## Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts






Berlin und Leipzig
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1922

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
843422.

# Inhaltsverzeichnis.

# Literatur.

## 1. Über das Gesamtgebiet.

Cajori, Fl., A history of mathematics. 2. ed. New York 1919.
Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. I[3], 1907; II[2], 1900; III[2], 1901; IV, 1908.
Günther, S., und Wieleitner, H., Geschichte der Mathematik. Leipzig-Berlin. I, 1908; II 1, 1911; II 2, 1921.
Kästner, A. G., Geschichte der Mathematik. Göttingen. I, 1796; II, 1797; III, 1799; IV, 1800.
Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik. Leipzig. I, 1902; II, 1903. 2. Aufl. Berlin. I, II, 1921; III, 1922; wird fortgesetzt.

## 2. Über bestimmte Zeiträume.

Bretschneider, C. A., Die Geometrie und die Geometer vor Euklid. Leipzig 1870.
Gerhardt, C. I., Gesch. d. Math. in Deutschland. München 1877.
Hankel, H., Zur Gesch. d. Math. in Alterthum u. Mittelalter. Leipzig 1874.
Hoppe, E., Mathem. u. Astron. im klassischen Altertum. Heidelberg 1911.
Kaye, G. R., Indian Mathematics. Calcutta & Simla 1915.
Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Milano 1914.
Olschki, L., Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur. I. Bd. Heidelberg 1918.
Simon, M., Geschichte der Mathematik im Altertum. Berlin 1909.
Tannery, P., La géométric grecque. Paris 1887.
Zeuthen, H. G., Gesch. d. Math. im Altertum u. Mittelalter. Kopenh. 1896.
—, Gesch. d. Math. im XVI. und XVII. Jahrhundert. Leipzig 1903.

## 3. Über einzelne Gebiete der Mathematik.

Braunmühl, A. v., Vorles. über Gesch. d. Trigonometrie. Leipzig. I, 1900; II, 1903.
Chasles, M., Aperçu hist. s. l'origine et le développement d. méthodes en géom. Bruxelles 1837. Deutsch von L. A. Sohncke, Halle 1839.
Heath, T. L., Englische Ausgaben von Apollonios (1896), Archimedes (1897; dtsch. v. O. Kliem, 1914), Aristarchos (1913), Euklid (1908) und Diophantos (2. ed. 1910) mit historischen Einleitungen.
Loria, G., Storia della geometria descrittiva. Milano 1921.
Smith, D. E., Rara arithmetica. Boston-London 1908.
Unger, F., Die Methodik d. prakt. Arithm. in hist. Entwickelung. Leipz. 1888.
Zeuthen, H. G., Die Lehre v. d. Kegelschnitten im Altertum. Kopenh. 1886.
Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Begründet von M. Cantor. Leipzig, von 1877 an.
Bibliotheca mathematica. Zeitschr. f. Gesch. d. mathem. Wiss. Herausgeg. von G. Eneström. 2. Reihe, 13 Bde., Stockholm 1887—99; 3. Reihe, 14 Bde., Leipzig 1900—1914.

# I. Altertum.

## 1. Die ältesten Kulturvölker.

> Wer sich mit einer Wissenschaft bekannt machen will, darf nicht nur nach den reifen Früchten greifen — er muß sich darum bekümmern, wie und wo sie gewachsen sind.
> J. C. Poggendorff.

Welchen Zustand die Mathematik auf den ersten Stufen des Menschengeschlechtes hatte, können wir an den heute noch lebenden primitiven Völkern sehen, die wie die Papua auf Neuguinea nur die Zahlwörter eins, zwei, meistens noch drei haben, von höheren Zahlen sich aber gar keine andere Vorstellung als „viel“ machen können. Wo uns die Mathematik zum erstenmal in der Geschichte entgegentritt, ist sie bereits von einer ausgebildeten Schrift getragen und steht etwa auf der Höhe, die sie bei einem guten Volksschüler erreicht, der seine 10 Schuljahre hinter sich hat.

Die älteste Kultur scheint am Nil zu liegen. Man hat erschlossen, daß in Ägypten das alte Mondjahr im Jahre 4241 v. Chr. durch das 365tägige Sonnenjahr ersetzt wurde. Wieviel höher als bei den Papua müssen also damals schon die mathematischen Fähigkeiten der Ägypter entwickelt gewesen sein! Wirkliche Zeugnisse (in Hieroglyphenschrift) haben wir aber auch erst etwa seit dem Jahre 2000. Es sind Papyrusbruchstücke und vor allem eine gut erhaltene Rolle, 20 m lang und 30 cm breit, das sog. „Rechenbuch des Aḥmes[1]) (sprich Achmes; zw. 2000 und 1700). Der Schreiber hat wohl die Sache selbst schlecht verstanden, aber man sieht trotz vieler Unzulänglichkeiten, daß die

[1]) So hat sich der Name eingebürgert, etwas richtiger lautet er Jachmosche.

Ägypter damals schon das gesamte Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen beherrschten, wobei die letzteren immer in eine Summe von Stammbrüchen zerlegt wurden (z. B. $\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$). Das Zahlensystem beruhte auf der Grundzahl 10, ohne Stellenwert. Es werden drei- und viereckige Felder, Fruchthaufen und ähnliches nach meist angenäherten Formeln ausgewertet, die jedenfalls durch Probieren gewonnen waren. Der Kreis wird so berechnet, als ob $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3{,}16$ wäre. Für das, was wir Kotangente nennen, ist ein eigenes Wort vorhanden. Das ist verständlich, da dieser Begriff beim Bau der Pyramiden fortwährend benutzt werden mußte. Aber Aḥmes gibt auch schon rein theoretische lineare Gleichungen, die er ähnlich wie wir löst. Beispiele mit arithmetischen Reihen zeigen, daß ihm die einschlägigen Formeln bekannt sind. Nicht so sicher geht das aus dem einzigen Beispiel hervor, das auf die Summe einer geometrischen Reihe führt.

Die erwähnten Papyrusreste (vielleicht aus 2200 v. Chr.) enthalten noch außerdem geometrische Aufgaben, die auf das Ausziehen von Quadratwurzeln (aus Quadratzahlen) führen und zeigen, daß der sog. Pythagoreische Lehrsatz für bestimmte Dreiecke, deren Seiten sich wie 3:4:5 verhalten, in gewisser Art bekannt war. Daß die Baumeister verstanden, einfache Risse zu zeichnen, wird nicht verwundern; eher vielleicht, daß sie sich beim Entwurf quadratische Netze anlegten. Eine mathematische Lederrolle des Britischen Museums aus derselben Zeit ist leider noch nicht veröffentlicht.

Aus Babylon, dessen Kultur kaum viel jünger sein dürfte als die ägyptische, haben wir sichere Kunde erst seit der Zeit, da Sargon etwa um 2500 v. Chr. die Herrschaft der Akkader des Nordens auch auf die im Süden wohnenden Sumerer ausdehnte. Ihm wird die Sammlung des astrologischen Materials zu einem einheitlichen Werke zu-

geschrieben. Die Astronomie war aber damals noch sehr unentwickelt.

Von akkadischer Mathematik wissen wir bis heute weniger als von ägyptischer. Nur ein kleiner Teil der zahlreichen bereits ausgegrabenen, mit zierlicher Keilschrift bedeckten Tontäfelchen mathematischen Inhalts ist erst veröffentlicht, noch weniger ist entziffert. Wieviel mag noch auf der weiten mesopotamischen Ebene im Boden stecken!

Das Vorhandene erweist, daß die Babylonier jener Zeit ein (auf die Sumerer zurückgehendes) Sechzigersystem mit Stellenwert hatten, in dem sie mittels Multiplikations- und Divisionstafeln gewandt rechneten. Auch Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen wurden gefunden. Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen kommen vor, in der späteren Astronomie (kaum vor dem 6. Jahrhundert v. Chr.) wurden sogar höhere arithmetische Reihen verwendet. Das Sechzigersystem erstreckte sich auch auf die Brüche. Da 𒁹 = 1 ist, konnte 𒁹𒁹 hiernach sowohl 2, als auch 61 oder $1\frac{1}{60}$ bedeuten, je nachdem man die Einerstelle annahm. Eine Null fehlte noch. Für die Praxis war dieses Sechzigersystem mit einem Zehnersystem gemischt. Die Herkunft der Grundzahl 60 ist umstritten. Mit dem Kalenderjahr hat sie jedenfalls nichts zu tun. Eher ist ein Zusammenhang möglich mit der Sechsteilung (und schließlich 360-Teilung) des Kreises.

Ägypter und Babylonier trafen sich schon früh auf syrischen Märkten und in Beduinenzelten. Zur Zeit des *Aḥmes* ging die Sechsteilung des Kreises nachweisbar aus dem Reiche Akkad nach Ägypten über. Sonst weiß man von babylonischer Geometrie nur noch, daß man einfache Flächen, aber auch Wälle mit trapezförmigem Querschnitt zu berechnen verstand und daß schon um 2000 Näherungsverfahren (rohe und genaue) für die Berechnung

der Hypotenuse aus den Katheten bekannt waren, die vielleicht auch nach Ägypten durchsickerten.

Man wird auch ein Wort über die Chinesen erwarten. Diese schreiben sich in übertriebenem Nationalstolz eine sehr alte Kultur und zahlreiche Entdeckungen zu. Die ersten Missionäre des 16. Jahrhunderts glaubten das zunächst alles und die alten Chinesen haben in weiten Kreisen noch heute einen bedeutenden Ruf. Wahrscheinlich stand aber die chinesische Kultur noch im 2. Jahrtausend v. Chr. auf sehr niedriger Stufe. Die geschichtliche Zeit läßt man gewöhnlich im Jahre 875 v. Chr. beginnen, weil damals eine Sonnenfinsternis stattfand, die die Chinesen vorausgesagt haben wollen. Ganz vor kurzem wurde aber nachgewiesen, daß diese Finsternis im Reiche der Mitte gar nicht sichtbar war. Da im Jahre 213 v. Chr. durch einen grausamen Kaiser alle wissenschaftlichen Bücher verbrannt und die widerspenstigen Gelehrten eingegraben wurden, sind begreiflicherweise alle auf früher sich beziehenden, übrigens spärlichen Nachrichten, mit Vorsicht aufzunehmen. So sei nur erwähnt, daß möglicherweise der Pythagoreische Lehrsatz für den Fall 3, 4, 5 im 12. Jahrhundert v. Chr. bekannt war. Für $\pi$ verwendete man im alten China, wie übrigens auch in Babylon (und darnach in der Bibel), keinen anderen Wert als 3.

Vielleicht später als am Nil und Euphrat, aber jedenfalls schon vor Christus lebten auch in der sog. Neuen Welt Völker mit hoher Kultur, wie die Maya in Mittelamerika. Von ihnen wissen wir einiges, das sich auf Mathematik bezieht. Sie besaßen ein ganz durchgebildetes Zwanzigersystem mit Stellenwert und einer Null. Das System hatte an der 3ten Stelle einen Knick, indem dort die Zahl 18 als Grundzahl auftrat. Es hing eng mit dem amtlichen Kalenderjahr zusammen (1 Jahr = 18 Monate = 360 Tage) das neben dem Sonnenjahr bestand. Die in unseren Ziffern,

aber im Mayasystem geschriebene Zahl 11 bedeutet also 21, 111 aber $1 \cdot 360 + 1 \cdot 20 + 1 = 380$. Die Ziffern bestanden aus Strichen und Punkten, die Null war wie ein Auge. Ob die Maya mit diesem System auch rechneten, ist freilich unsicher. Über die ältesten Inder werden wir im Zusammenhang mit den späteren sprechen (S. 38).

## 2. Griechen und Römer.

### A. Entwicklung der Mathematik zur Wissenschaft.

Den von Babyloniern und Ägyptern aufgesammelten Rohstoff in Astronomie und Geometrie haben die Griechen in ein wissenschaftliches System gebracht. Thales (624? bis 548?) aus Milet und Pythagoras von Samos, etwa 50 Jahre später, treten hier als erste Mathematiker, etwas sagenhaft, in die Erscheinung. Es ist vielleicht kein Zufall, daß beide als Ionier jener kleinasiatischen Ecke entstammen, zu der als Hinterland Mesopotamien gehört, und es wird von beiden berichtet, daß sie später ägyptische Weisheit an Ort und Stelle studiert haben. Die geometrischen Sätze, deren „Erfindung" man Thales zuschreibt, sind, wie der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, fast alle so anschaulicher Natur, daß sie schon viel älter sein müssen. Etwas anderen Charakter hat der Satz vom rechten Winkel im Halbkreis. Vielleicht hat Thales diese und ähnliche Sätze als erster in abstrakt theoretischer Form ausgesprochen.

Wie Thales, hat auch Pythagoras keine Schriften hinterlassen. Bei letzterem ist schwer zu unterscheiden, was ihm selbst und was seiner Schule angehört. Diese etwas geheimnisvolle Bruderschaft hatte er um 530 in Kroton in Unteritalien gegründet. Die Pythagoreer betrachteten die Zahl als das Wesen aller Dinge. Die Grübeleien, die sich daran knüpften, hatten, so phantastisch sie

zum Teil auch waren, doch einen nicht zu unterschätzenden wissenschaftlichen Wert. Leiteten sie im allgemeinen auf die zahlenmäßige Betrachtung der Natur hin — es ergab sich z. B. die Harmonie des Dreiklangs durch einfache Zahlen ausgedrückt — so folgten daraus auch wichtige rein mathematische Begriffsbildungen und Entdeckungen. „Vollkommene" und „befreundete" Zahlen wurden ins Auge gefaßt, die Reihe der „Dreieckszahlen" gebildet, die Begriffe der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Proportion aufgestellt. Daß der „Pythagoreische Lehrsatz" in jener Zeit in allgemeiner Form ausgesprochen wurde, erscheint sicher, wenn wir auch weder die Art der Entdeckung und noch weniger irgendeinen frühen Beweis dafür kennen. Auch hier gelang schon die Aufstellung der allgemeinen Ausdrücke für rationale Seiten, die wir kurz $n$ (ungerade), $\frac{1}{2}(n^2-1)$, $\frac{1}{2}(n^2+1)$ schreiben. Es ist sicher, daß schon die Pythagoreer die einfachsten geometrischen Begriffe und Sätze in ein geordnetes System brachten, das sie mit Beweisen ausstatteten. Von den regelmäßigen Vielflachen kannten sie den Würfel, das Vier- und das Zwölfflach. Das regelmäßige Sternfünfeck (Pentagramm) war ihr Abzeichen. Zwar wurde die eigentliche Sekte der Pythagoreer um 500 aus politischen Gründen zerschlagen, aber die Schule überdauerte wenigstens noch die zwei nächsten Jahrhunderte (s. S. 14).

Die Pythagoreische „Zahl" war nur die ganze Zahl. Aber es dauerte offenbar nicht lange, bis man durch eingehendere Beschäftigung mit dem Pythagoreischen Lehrsatz merkte, daß nicht jeder Strecke eine „Zahl" entspricht. Das erste derartige Beispiel war die Quadratdiagonale, deren Verhältnis $\sqrt{2}$ zur Seite nicht durch eine „Zahl" ausdrückbar war. Schon vom Ende des 5. Jahrhunderts wird berichtet, daß Theodoros von Kyrene den

Beweis für die „Irrationalität“ aller Wurzeln aus Nichtquadratzahlen lieferte.

Auch von anderer Richtung her wurde die Unzulänglichkeit der Pythagoreischen „Zahl“ aufgedeckt. Es waren die Philosophen von Elea, die ebenfalls aus Ionien nach Süditalien übergesiedelt waren, unter ihnen vor allem Zenon, die in heute noch berühmten Paradoxen offenbar augenscheinliche Dinge, wie die Bewegung eines Pfeils, oder das Einholen einer Schildkröte durch Achilles, wegdisputierten, indem sie sich geschickt auf die Schwierigkeiten stützten, die den damals noch ganz neuen Begriffen des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen, sowie der Stetigkeit innewohnen. Mittelbar trugen sie durch ihre Kritik sicher zur Förderung der exakten Theorie der Inkommensurabilität und des Irrationalen bei.

Im 5. Jahrhundert, wo Athen nach Niederwerfung der Perser reich und mächtig unter Perikles die edelsten Blüten der Kunst trieb, sprangen auch die drei Probleme auf, deren Unlösbarkeit mit elementaren Mitteln erst im 19. Jahrhundert zwingend bewiesen wurde: 1. die Quadratur des Kreises; 2. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels; 3. die Verdoppelung des Würfels. An ihnen erwuchs die griechische Mathematik. Ging es nicht „mit Zirkel und Lineal“, was wohl schon damals, sicher aber seit Platon (s. u. S. 13) allein als „elementar“ betrachtet wurde, so erfand man anderes. So wird schon dem Sophisten Hippias von Elis (geb. um 460), einem Zeitgenossen des Sokrates, die Erfindung einer transzendenten Kurve zum Zwecke der Winkeldrittelung, ja Mehrteilung, zugeschrieben, die später von Deinostratos, einem Schüler Platons, zur Kreisquadratur benutzt wurde und daher heute „Quadratrix des Deinostratos“ heißt. Auch „Einschiebungen“, die sich leicht durch Mechanismen verwirklichen ließen, dienten wohl schon im 5. Jahrhundert der

Lösung der Dreiteilung und der Würfelverdoppelung. Letztere Aufgabe — das „Delische Problem" genannt, weil man es auf einen Delischen Orakelspruch zurückführte — ist die unmittelbare Verallgemeinerung der Pythagoreischen Verdoppelung des Quadrats und läuft auf die Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ hinaus. Gegen Ende des 5. Jahrhunderts förderte Hippokrates von Chios, auch ein Ionier, dieses Problem außerordentlich durch den Nachweis, daß es auf die Einschaltung von zwei mittleren Proportionalen $x$, $y$ zwischen die einfache und doppelte Würfelkante ($a$ und $2a$) gelöst werden kann. Denn wenn $a:x = x:y = y:2a$, so ist $x^3 = 2a^3$. Diese Fassung hat eine wichtige Rolle in der Proportionenlehre bis ins 17. Jahrhundert gespielt und ist schon im 4. Jahrhundert v. Chr. zu neuen Entdeckungen Anlaß gewesen. Als erster, der über die „Quadratur des Kreises" soll nachgesonnen haben, wird Anaxagoras (500?—428), der letzte ionische Philosoph, genannt. Doch ist von dem Ergebnis seines Nachdenkens nichts überliefert.

Einen bemerkenswerten Anlauf dazu machte jedoch der schon erwähnte Hippokrates, indem er zeigte, daß es Kreismöndchen gibt, die an Fläche einem geradlinigen Dreieck gleich sind. Das einfachste solche Möndchen ist das über der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks gezeichnete, das dem Dreieck gleich ist. Die Auffindung von noch zwei solchen Möndchen verrät samt den schwierigen Beweisen einen großen Scharfsinn. Hippokrates' Arbeit ist die erste mathematische Schrift, die uns von den Griechen erhalten ist. Sein Lehrbuch der Geometrie, das erste dieser Art, ging leider verloren.

Wir müssen aus dem 5. Jahrhundert noch den genialen Denker Demokritos aus Abdera (in Thrakien) nennen. Auch er besuchte Ägypten, und er soll über inkommen-

surable Linien, über Geometrie, über Zahlen und auch über Theaterperspektive geschrieben haben. Verbürgt ist allein — und das sichert ihm dauernd einen Platz unter den ersten Mathematikern — daß er die Formel $\frac{1}{3} Gh$ für das Volumen der Pyramide fand und diese auch auf den Kegel ausdehnte.

War Athen durch den Peloponnesischen Krieg auch politisch herabgedrückt, so stand doch die Wissenschaft immer noch auf hoher Stufe. Für die erste Hälfte des 4. Jahrhunderts ist Platons Akademie richtunggebend. Hatte es schon vorher einzelne Privatlehrer der Mathematik gegeben, so wurde dieses Fach von jetzt an verbindlicher Lehrgegenstand für den höheren Unterricht und ist es seitdem geblieben. Über den Pforten der Akademie stand der Satz: „Niemand wird hier zugelassen ohne geometrische Vorbildung". An eigentlichen mathematischen Leistungen schreibt man Platon, der seine mathematische Ausbildung nicht von seinem philosophischen Lehrer Sokrates, sondern von Theodoros (s. S. 10) hatte, zwar nur die Formeln $n$ (gerade), $(\frac{1}{2} n)^2 - 1$, $(\frac{1}{2} n)^2 + 1$ für rationale rechtwinklige Dreiecke zu (vgl. o. S. 10). Es ist aber ohne Zweifel, daß die logischen Erörterungen in seiner Schule wesentlich zum Aufbau des lückenlosen Systems der Elementargeometrie beitrugen, wie es uns bald nach seinem Tode entgegentritt. Leider sind zwei Lehrbücher der gesamten Geometrie aus Platons Zeit selbst völlig verloren. Auch von des Theaitetos, eines Mitschülers Platons, offenbar großen Verdiensten um die Weiterbildung der Lehre vom Irrationalen haben wir nur mittelbare Kunde. Theaitetos soll auch das regelmäßige Acht- und Zwanzigflach zum erstenmal in Betracht gezogen haben.

Der bedeutendste mathematische Kopf der Zeit war Eudoxos von Knidos, der, durch Archytas von Tarent,

wie Platon Pythagoreisch gebildet, erst im späteren Alter zur Akademie in Beziehung trat. Schriften sind auch von ihm nicht erhalten. Seine Hauptleistung ist eine methodische, die für die damalige Mathematik von grundlegender Wichtigkeit war. Zunächst erweiterte er den Begriff der Proportion so, daß er auch die irrationalen Größen umfassen konnte, was die Geometrie gebieterisch verlangte. Im Anschluß daran begründete er das im 17. Jahrhundert „Exhaustionsmethode" genannte Verfahren. Diese Methode diente zu strengen Beweisen von Flächen- und Rauminhaltsformeln, die auf anschauliche Weise, oder durch Anwendung mechanischer Sätze, immer aber unter Benutzung des Unendlichen gefunden worden waren. Der Hilfssatz, den er dabei zugrunde legte, lautet: Nimmt man von einer Größe die Hälfte oder mehr weg und führt das nacheinander hinreichend oft aus, so kommt man schließlich zu einer Größe, die kleiner ist als eine beliebige gegebene Größe gleicher Art. Mittels der Exhaustionsmethode konnte dann Eudoxos den ersten Beweis des Satzes von Demokritos liefern, daß eine Pyramide gleich $\frac{1}{3}$ Grundfläche $\times$ Höhe ist und daß dieselbe Formel für den Kegel gilt. Ja, es gelang ihm zu beweisen, daß Kugeln sich wie die Kuben ihrer Radien verhalten (für Kreise hatte das Entsprechende schon Hippokrates gezeigt). Man weiß ferner, daß er im Anschluß an eine Arbeit über die regelmäßigen Körper die stetige Teilung systematisch behandelte und die Aufgabe von den zwei mittleren Proportionalen mittels einer, nicht überlieferten, Kurve löste. Nur ein Mann von ungeheurer mathematischer Anschauungskraft konnte auf das von ihm aufgestellte System konzentrischer Kugeln verfallen, mittels dessen er die Bewegungen der Planeten zu beschreiben vermochte.

Von dem oben genannten Archytas (428—347), der als Staatsmann und Stratege der Hort des in Italien

niedergehenden Griechentums war, ist nichts überliefert als eine Lösung der Delischen Aufgabe mittels des Schnittes eines Zylinders und eines Kegels, die ihn aber allein zum bedeutenden Mathematiker stempelt. Es ist dies das erste Beispiel einer Raumkurve. Dieselbe Aufgabe soll einen Platoniker und Schüler des Eudoxos, namens Menaichmos dazu geführt haben, die Schnitte senkrecht zu einer Mantellinie eines Kreiskegels als „räumliche Örter" systematisch einzuführen. Der spitzwinklige Kegel ergab die Ellipse, der rechtwinklige die Parabel, der stumpfwinklige die Hyperbel, deren Asymptoten Menaichmos schon erkannte. Er löste dann die Aufgabe mit den zwei Parab[illegible] $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, und auch mit der Parabel $x^2 =$ [illegible], und der Hyperbel $xy = 2a^2$, was wir heute aus der S. 12 gegebenen Proportion sofort ablesen.

Eines der größten Verdienste fällt Platon und seiner Schule zu durch die allgemeinere Einführung der „analytischen Methode". Diese besteht darin, daß die Aufgabe als gelöst betrachtet und von hier aus rückzuschließen versucht wird bis zu einem bekannten Satz oder einer bekannten Konstruktion. Leistete diese Methode schon den Alten vorzügliche Dienste bei der Auffindung von Beweisen und der Ausführung von Konstruktionen, so feierte sie erst ihre Triumphe, als man im 16. und 17. Jahrhundert begann, die neugeschaffene Buchstabenalgebra auf die Geometrie anzuwenden (s. u. S. 115).

Die zweite Hälfte des 4. Jahrhunderts ist durch die überragende Persönlichkeit des Makedoniers Aristoteles (384—322), Schülers von Platon und Lehrers Alexanders des Großen gekennzeichnet. Wie Platon zwar kein produzierender Mathematiker, hat dieser hervorragende Geist, „der Philosoph" des Mittelalters schlechthin, doch dem Fortschritt der Mathematik gedient, indem er einerseits seine berühmte Logik nach dem Vorbild der Elemen-

tarmathematik aufbaute, andererseits bei seinen Zuhörern (und später bei den Lesern) die niedere Mathematik (ohne Infinitesimales) als bekannt voraussetzte. Daraus entsprang nicht nur bei vielen erst die Beschäftigung mit Mathematik, sondern aus seinen Beispielen wuchsen auch Einzelforschungen hervor (s. u. S. 66). Selbst ein gewaltiger Buchgelehrter, leitete er seine Schüler an, von allen Fächern das bisher Geleistete zusammenzustellen. Dies tat für die Mathematik ein gewisser Eudemos von Rhodos, aus dessen Geschichtswerk uns wertvolle Auszüge erhalten sind, die für die ältere Zeit vielfach die einzige Quelle bilden.

### B. Die alexandrinische Blütezeit.

Die Schlacht von Chaeronea (338 v. Chr.), in der Philipp von Makedonien, Alexanders Vater, die mit Athen vereinigten Griechen schlug, nahm dem uneinigen Griechenland nicht nur seine Selbständigkeit, sondern leitete auch den wissenschaftlichen Verfall des Stammlandes der Griechen ein. Als das von Alexander gegründete Weltreich nach kurzem Bestande zerfiel, kam Ägypten an Ptolemaios Soter (324), der Alexandria zur Hauptstadt machte. Die Gründung einer Art Universität (Museion) und zweier großen Bibliotheken bewirkten später die Übersiedlung der gesamten griechischen Fachwissenschaft in dieses neue geistige Zentrum, dessen Glanzzeit das 3. Jahrhundert war. Nur die philosophischen Schulen blieben aus äußeren Gründen an Athen gefesselt.

Was im besonderen die Mathematik betrifft, so erreichte sie in jener Zeit einen Höhepunkt, den sie erst vom 17. Jahrhundert an überschritt. Drei leuchtende Namen begegnen uns vor allem: Eukleides, Archimedes, Apollonios. Von allen dreien sind, im Gegensatz zum vorhergehenden Zeitabschnitt, die Hauptwerke erhalten, und an sie konnte

im 16. Jahrhundert die wiedererwachende Wissenschaft anknüpfen. Euklid, berühmt durch seine „Elemente", die an innerer Folgerichtigkeit alle früheren so sehr übertrafen, daß auch die modernsten kritischen Untersuchungen nur geringfügige logische Mängel feststellen konnten, schrieb dieses Hauptwerk wohl um 325. Man weiß nichts über sein vorheriges Leben — bis in die Neuzeit herein wurde er oft mit Euklid von Megara verwechselt, der ein Schüler des Sokrates war — aber er begründete in Alexandria, wahrscheinlich auf Einladung des ersten Ptolemäers hin, eine mathematische Schule. Von dem Unterricht an dieser kann man sich höchstens nach den noch erhaltenen Lehrbüchern Euklids eine Vorstellung machen, über seinen Tod und seine Nachfolger im Lehramt, von denen man kaum die Namen kennt, ist nichts bekannt. Desto strahlender ist der Ruhm seiner Werke.

Die „Elemente", nach der Bibel das verbreitetste Buch, in etwa 1500 verschiedenen Ausgaben erschienen, waren in 13 Bücher eingeteilt. Ein 14. Buch, das gewöhnlich noch angehängt wird, enthält eine von dem alexandrinischen Astronomen Hypsikles im 2. Jahrhundert v. Chr. im Anschluß an eine Untersuchung des Apollonios (s. u. S. 25) verfaßte Abhandlung über die regelmäßigen Vielflache, ein 15tes eine wesentlich schwächere Arbeit über denselben Gegenstand, die einem Damaskios (d. i. aus Damaskus; 6. Jahrhundert n. Chr.) zugeschrieben wird. Euklids „Elemente" sind ein rein theoretisches Werk ohne irgend welche Zahlenrechnungen oder praktische Anwendungen, wozu man auch die Berechnung von Flächen- und Rauminhalten zählte. Die Größen, die Euklid seinen Sätzen zugrunde legt, sind, sofern es sich nicht um Sätze über ganze Zahlen handelt, ausschließlich geometrische Größen. Vieles aber erscheint uns heute als verschleierte Algebra, und es ist wohl kein Zweifel, daß die betreffen-

den Sätze auch von den Griechen (schon von den Pythagoreern an) wie unsere algebraischen Formeln benutzt wurden, da ihnen ja eine Algebra fehlte. Die „Elemente" bilden die Krönung der Versuche Platons zur Systematisierung der Geometrie. Sie enthalten, wenn auch nicht sämtliche Sätze, so doch alle wichtigeren Entdeckungen der Vorgänger, besonders die des Eudoxos und Theaitetos. Ausgeschlossen blieben, als nicht elementar, die verschiedenen Versuche zur Lösung der drei berühmten Probleme (s. o. S. 11), also auch die Kreisberechnung, die übrigens wohl bei dem damaligen Stande zu den rein praktischen Anwendungen gerechnet werden durfte.

Jedem der 13 Bücher der „Elemente" gehen die nötigen Definitionen der gebrauchten Fachausdrücke voraus. Im ersten Buch werden auch solche erklärt, die Euklid selbst nicht verwendet, wie Rhombus und Trapez. Vor dem ersten Buch sind auch je fünf „Forderungen" (Postulate) und „gemeinsame Vorstellungen" (später „Axiome" genannt), zusammengestellt, die im Verein mit den Begriffserklärungen die logische Grundlage des Lehrgebäudes bilden sollen. Besonders die fünfte Forderung wurde schon im Altertum als „beweisbar" angegriffen. Sie besagt, daß zwei Gerade sich schneiden, wenn die Summe der mit einer Schneidenden gebildeten inneren, auf derselben Seite der Schneidenden liegenden Winkel $< 2R$ ist. Aber die Unbeweisbarkeit dieser Forderung, die erst im 19. Jahrhundert sichergestellt wurde, führte zur Entdeckung der heute sogar für die Physik und Astronomie wichtig gewordenen nicht-Euklidischen Geometrie (vgl. das 2. Bändchen), und Euklid wurde nach einem Streit von über 2000 Jahren glänzend gerechtfertigt.

Das erste Buch enthält die wichtigsten Sätze über senkrechte und parallele Gerade, sowie über Dreiecke und Parallelogramme mit dem Pythagoreischen Lehrsatze als

Abschluß. Dieser wird in der von Euklid selbst stammenden, heute noch in allen Lehrbüchern vorgeführten Art, bewiesen. Das zweite Buch gibt geometrische Algebra soweit, daß, wie wir sagen, eine quadratische Gleichung allgemeiner Art gelöst werden kann. Im dritten Buch wird der Kreis (einschließlich der Sätze über die Potenz eines Punktes), im vierten werden die regelmäßigen Vielecke behandelt. All das ist Pythagoreisches Gut und zu den Beweisen werden keine Proportionen verwendet (auch nicht bei den Potenzsätzen). Das fünfte Buch gibt erst die allgemeine Proportionslehre nach Eudoxos, das sechste deren Anwendung auf Geometrie (Ähnlichkeitslehre) und geometrische Algebra (sog. „Flächenanlegungen"). Hier soll die Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes auf beliebige ähnliche Figuren über den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks von Euklid selbst herrühren. Die Bücher 7—9 handeln von den rationalen Zahlen. Im 7. Buch werden manche Sätze des 5. Buches in einfacherer Form mit beschränkterer Gültigkeit wieder abgeleitet. Hier steht auch die sog. Kettendivision (die man heute noch „Euklidischen Algorithmus" nennt) zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen. Das 8. und 9. Buch enthält unter der Form von fortlaufenden stetigen Proportionen verschiedene Sätze über Potenzen (vgl. das Delische Problem S. 12), Wurzeln und geometrische Reihen. Im 9. Buch steht u. a. der Beweis, daß die Reihe der Primzahlen unendlich ist. Das 10. Buch enthält, als Vollendung des von Theaitetos Geleisteten, eine fein ausgearbeitete, aber bei dem Mangel einer Zeichensprache schwierig zu verstehende Klassifikation gewisser irrationalen Größen, die zur Konstruktion der regelmäßigen Vielecke und Vielflache im 13. Buch benötigt werden. Im 11. Buch wird ein Abriß der Stereometrie gegeben, aber nicht mit der Lückenlosigkeit der ebenen Geo-

metrie, und das 12. Buch bringt Anwendungen des Exhaustionsbeweises, wie wir solche schon erwähnten (S. 14). Der Exhaustionsbeweis wird in jedem Falle gesondert vollständig durchgeführt, wie den Griechen überhaupt jede allgemeine Methode fehlte.

Die „Data" Euklids, sein zweites uns erhaltenes Werk, enthalten sachlich gegenüber den ersten 6 Büchern der „Elemente" nichts Neues, bilden aber als Anleitung zur Benutzung der analytischen Methode (s. o. S. 15) bei Beweisen eine methodische Neuerung, die auf Platon zurückgeht. Für Konstruktionen scheinen dasselbe die leider verlorenen „Porismen" geleistet zu haben. Verloren sind auch eine kurze Kegelschnittlehre, ein Werk über Flächen als geometrische Örter und eine Abhandlung über Fehlschlüsse. Erhalten ist hingegen wieder eine Schrift „Über Teilung der Figuren", allerdings nur in arabischer Bearbeitung. Sie enthält die gewöhnlichen und auch schwierigere Aufgaben über Teilung von Drei-, Vier- und Fünfecken, sowie von Kreisen in gleiche oder dem Verhältnis nach gegebene Teile. Eine ebenfalls erhaltene Schrift „Phainomena" übermittelt Sätze der Kugelgeometrie (Sphärik), die vielleicht von Eudoxos begründet wurde, und Astronomie. Eine „Optik" bringt auch einige feldmesserische Aufgaben, und eine Schrift über Musik behandelt die Pythagoreische Lehre von der Tonleiter. Die letzteren drei Schriften sind nicht ganz fehlerfrei; sie waren aber, wie die leichteren Teile der „Elemente", auch im Mittelalter allgemein in Verwendung.

Die große Volkstümlichkeit, die Euklid schon im Altertum genoß, wird bekräftigt durch einige Anekdoten, die über ihn im Umlauf waren. Von diesen ist die bekannteste, daß er dem König Ptolemaios auf seine Frage, ob es denn nicht einen einfacheren Zugang zur Geometrie gebe als die „Elemente", antwortete: „Es gibt keinen Königs-

weg zur Geometrie". Noch mehr solcher Züge werden von Archimedes berichtet, dem größten Mathematiker des Altertums und einem der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. Geboren zu Syrakus auf Sizilien im Jahre 287, eng befreundet, wenn nicht verwandt mit dem dortigen Königshaus, hatte er längere Zeit in Alexandria studiert, war wieder in seine Heimat zurückgekehrt, blieb aber immer in Verkehr mit dem Kreis von Alexandria. Er fiel unter der Waffe eines Soldaten bei der Eroberung seiner Vaterstadt durch den römischen Feldherrn Marcellus, im Jahre 212. „Störe mir meine Kreise nicht", soll er seinem Mörder zugerufen haben. Die unmöglichen Geschichten, wie Archimedes während dieser Belagerung durch Brennspiegel die Schiffe der Römer verbrannt haben soll, zeigen doch, wieviel man ihm zutraute.

Archimedes ging, als Sohn eines Astronomen, wohl von der Astronomie aus. Marcellus, der den großen Mann gerne geschont hätte, brachte ein von ihm konstruiertes kunstvolles Planetarium, sowie seinen Himmelsglobus nach Rom. Durch die astronomischen Arbeiten wurde Archimedes wohl dazu geführt, ein ganz eigenartiges Werk zu verfassen „Über die Zahl des Sandes", worin er ein System zur Bezeichnung beliebig großer Zahlen aufstellte, um zu zeigen, daß, auch wenn man das ganze Weltall mit Sand ausfüllte, man doch die Zahl der Sandkörner angeben könnte. Er faßte zu diesem Zwecke die größte Zahl, die sich mit den gewöhnlichen Zahlwörtern aussprechen ließ, d. i. eine Myriade Myriaden ($10000 \cdot 10000 = 10^8$) als neue Einheit (Oktade) auf und konnte so zunächst bis zu 2 Oktaden ($10^{16}$) und dann beliebig weit gehen. Eine Oktade Oktaden bildet eine Periode ($10^{8 \cdot 10^8}$) und diese wird als neue Einheit betrachtet. Archimedes fand, daß bei der größten, damals für möglich gehaltenen Ausdehnung der Fixsternkugel diese höchstens von 1000 My-

riaden der 8. Oktade ($10^{71}$) Sandkörnern erfüllt sein könnte.

Daß Archimedes ein vorzüglicher Zahlenrechner war, zeigte er in einer verstümmelt erhaltenen Abhandlung zur Kreismessung, wo er mittels Einschließung durch regelmäßige Vielecke für $\pi$ die Ungleichung gab $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Aber Heron (s. u. S. 29) berichtet von einer verlorenen Schrift des Archimedes, worin er die Grenzen $\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$ angegeben habe. Das bedeutet eine Genauigkeit von 5 Dezimalsteilen. Wie die dabei nötigen Quadratwurzelziehungen ausgeführt wurden, ist bis heute trotz vielfacher Erörterung nicht sichergestellt (vgl. u. S. 31).

Die bedeutendsten rein mathematischen Leistungen des Archimedes liegen in den beiden großen Werken „Über Kugel und Zylinder" und „Über Konoide und Sphäroide" vor. Das erstere enthält die berühmte Oberflächen- und Volumenbestimmung der Kugel, das letztere behandelt die Rotationsflächen zweiter Ordnung und gibt deren Raumausmessung, wobei auch die Fläche der Ellipse abfällt. Hier sowohl, wie in der schönen Abhandlung „Über Spiralen" werden infinitesimalgeometrische Sätze nur in strenger Art bewiesen (s. o. S. 14). Archimedes bestimmt in der letztgenannten Schrift von der „Archimedischen Spirale", um die es sich allein handelt, u. a. auch die Tangente und verwendet die Linie zur Geradstreckung des Kreisumfangs.

Die mathematischen Leistungen des Archimedes sind aber von seinen mechanischen nicht zu trennen. Jedermann kennt die Geschichte von der Entdeckung des „Auftriebs" im Wasser, daß Archimedes das Gesetz irgendwie beim Baden gefunden habe und dann nackt durch die Straßen gelaufen sei mit dem Ruf „Heureka" (Ich hab's gefunden). Oder jene Erzählung von dem goldenen Kranze

des Königs Hieron, der mit Silber gefälscht war, was Archimedes durch eben jenes Gesetz nachweisen konnte. Wir müssen es uns aber versagen, auf sein Werk „Über schwimmende Körper" einzugehen, das die Grundlegung der Lehre vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten enthält. Wichtiger ist uns hier die reine Mechanik. Das Hebelgesetz („Gib mir einen festen Standpunkt, und ich werde die Erde in Bewegung setzen") hat Archimedes in seinen Elementen der Mechanik („Über das Gleichgewicht ebener Flächen") exakt bewiesen und es in vielseitiger Weise, besonders auf Schwerpunkts-, Flächen- und Volumenbestimmungen angewendet. Er bildete sich eine eigene Methode aus, die ganz der Integralrechnung entspricht, von ihm aber als für die Geometrie nicht streng beweisend angesehen wurde. Mittels dieser Methode fand er offenbar die in den obenerwähnten Schriften enthaltenen Ergebnisse, ebenso wie die Quadratur der Parabel, worüber noch eine eigene Abhandlung vorliegt, die sowohl den mechanischen als den rein mathematischen Beweis enthält. Die Methode selbst erläuterte Archimedes in einem Brief an Eratosthenes (s. u. S. 28), der erst im Jahre 1907 herausgegeben wurde, nachdem sein Vorhandensein in einer Konstantinopeler Klosterbibliothek festgestellt war. Die Schrift enthält auch Schwerpunktsbestimmungen für die „Konoide und Sphäroide", die man ja damals nur als „Körper" betrachtete. Man weiß, daß Archimedes auch diese Sätze später streng bewies, wenn die Beweise auch selbst verloren gingen.

Die Grundlage aller exakten Beweise dieser Art ist eine „Forderung", die schon Eudoxos benutzte, und die Archimedes seiner Schrift über Kugel und Zylinder als 5te vorausschickte: Der Unterschied zweier Größen (gleicher Art) kann so oft zu sich selbst addiert werden, daß die Summe jede Größe (derselben Art) übertrifft. Euklid

leitet damit sein 5. Buch ein. Die Wichtigkeit dieses heute oft nach Archimedes benannten „Messungsaxioms" wurde erst von der neueren Funktionentheorie (O. Stolz) und Axiomatik (D. Hilbert) wieder hervorgehoben.

Archimedes' Schriften sind in seinem dorischen Heimatdialekt klar und flüssig geschrieben. Es muß noch mehr von ihnen verloren sein, als was wir schon erwähnten. Man weiß von einer Abhandlung über halbreguläre Körper, und der Perser Albīrūnī (s. u. S. 50) bezeichnet die Formel $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, die wir nach Heron benennen, bei dem sie sich zuerst findet (s. u. S. 30), als Archimedisch. Arabisch sind ferner „Wahlsätze" überliefert, deren 8ter die Lösung der Winkeldrittelung durch eine seitdem oft wieder „erfundene" Einschiebung einer Strecke zwischen einem Kreise und dessen (verlängertem) Durchmesser löst. Rein Algebraisches ist überall in Archimedes' Schriften verstreut enthalten, so die Summation der Reihe der Quadratzahlen in der Schrift über die Spiralen. Man schreibt Archimedes auch das in Distichen abgefaßte „Rinderproblem" zu, bei dem es sich um die Auflösung von 3 linearen Gleichungen mit 4 Unbekannten handelt.

Was Archimedes an Sätzen über Kegelschnitte brauchte, entnahm er dem Werk des Euklid (s. o. S. 20). Seine eigenen Verbesserungen hat er nicht gesondert zusammengestellt. Etwa 40 Jahre nach ihm aber (um 200) lehrte zu Alexandria und später zu Pergamon (in Kleinasien) ein Geometer Apollonios, geb. zu Perge (in Pamphylien), vielleicht der zweitgrößte Mathematiker des Altertums, der die Lehre von den Kegelschnitten in einer solchen Vollständigkeit und streng systematischen Anordnung gab, daß erst die Neuzeit darüber hinausschreiten konnte. Sein Werk hatte 8 Bücher, von denen nur 4 grie-

chisch, drei weitere in arabischer Übersetzung erhalten sind, während das 8te verloren ist.

Apollonios gibt genau an, was er seinen Vorgängern verdankt. Darnach enthalten die 4 ersten Bücher die bis dahin bekannten Sätze, wenn auch erweitert und verallgemeinert. Im ersten Buch gibt Apollonios die Erzeugung der drei Kegelschnitte. Hier hat er gleich eine grundlegende Neuerung eingeführt. Er schneidet nicht wie Menaichmos (s. o. S. 15) jede Kegelschnittart aus einem Kegel mit anderem Öffnungswinkel, sondern ein einziger beliebig geöffneter Kreiskegel gibt ihm alle drei Arten von Kegelschnitten, indem er nur die Lage der schneidenden Ebene ändert. Dabei wird als Grundeigenschaft der Parabel wie schon bei Menaichmos diejenige gegeben, die wir durch die Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ ausdrücken. Die übrigens schon Archimedes bekannten Grundeigenschaften von Ellipse und Hyperbel aber, mit denen Apollonios diese Kurven einführt, können wir durch die entsprechenden Gleichungen $y^2 = 2px - \lambda x^2$ und $y^2 = 2px + \lambda x^2$ formelmäßig wiedergeben. Dabei ist im allgemeinen ein beliebiger Durchmesser zugrunde gelegt. An diese Grundeigenschaften knüpfte Apollonios gleich die neuen Namen „Parabel“ (= Flächenanlegung), „Ellipse“, d. h. Flächenanlegung mit einem „Mangel“ ($y^2 < 2px$) und „Hyperbel“, Flächenanlegung mit „Überschuß“ ($y^2 > 2px$). Ein weiterer methodischer Fortschritt war, daß Apollonios die beiden Äste der Hyperbel als eine Kurve betrachtete, was zu einer wesentlichen Verbesserung der Sätze über die Hyperbel und zu deren Angleichung an die entsprechenden über die Ellipse führte. Das erste Buch enthält auch die Tangentenbestimmung aller Kegelschnitte.

Im zweiten Buch werden hauptsächlich die Asymptoten und konjugierten Durchmesser (Achsen) besprochen. Das

dritte bringt vieles Neue und handelt von Sätzen über Dreiecke, Rechtecke und Quadrate, die mit Abschnitten von Sehnen, Asymptoten und Tangenten zusammenhängen. Es finden sich ferner, modern ausgedrückt, die Hauptsätze über die harmonischen Eigenschaften von Pol und Polare, sowie die projektive Erzeugung durch zwei Geradenbüschel. Die Brennpunkte von Ellipse und Hyperbel werden elementar-geometrisch eingeführt. Im vierten Buch wird die Höchstzahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte bestimmt, wobei auch Berührungen berücksichtigt werden. Das 5. Buch ist besonders merkwürdig durch die exakte Behandlung von Aufgaben über Extreme, die sich vor allem auf die Normalen der Kegelschnitte beziehen. Hier ist die Lehre vom Krümmungsmittelpunkt und den Evoluten im Keime enthalten. Das 6. Buch handelt in der Hauptsache von ähnlichen Kegelschnitten, während das 7. Buch Sätze über Funktionen der Längen konjugierter Durchmesser gibt. Das verlorene 8. Buch enthielt Aufgaben über den Gegenstand des 7. Buches.

Von zahlreichen anderen Arbeiten des Apollonios ist eine „Über den Verhältnisschnitt" (arabisch) erhalten; von den meisten anderen kennt man nur die Titel und den ungefähren Inhalt. Sie enthielten vielfach Anwendungen der Kegelschnitte und waren in der alexandrinischen Schule lange im Gebrauch. Wir erwähnen wegen der Neuheit des Gegenstandes eine über die gewöhnliche Schraubenlinie, wobei Apollonios wohl ebenso an Archimedes' „Spiralen" anknüpfte, wie in seinem „Schnellrechner" an dessen „Sandeszahl". In der letzteren Schrift, wo er eine glückliche Verbesserung der Archimedischen Zählmethode einführte, war vielleicht auch die Verfeinerung des Wertes von $\pi$ enthalten, die ihm zugeschrieben wird, ohne daß wir Zahlenmäßiges darüber wissen. Eine weitere Schrift handelte von den ersten Grundlagen der Geometrie.

Der „Apollonische Kreis" fand sich in den verlorenen „Ebenen Örtern"; über das „Apollonische Berührungsproblem", d. i. die Aufgabe, einen berührenden Kreis an drei gegebene Kreise, die auch in Punkte und Gerade ausarten können, zu konstruieren, lag eine eigene Schrift vor. Wie Archimedes arbeitete er auch über Katoptrik, wie Eudoxos in der Astronomie, wo ihm die geistreiche Epizyklentheorie angehört, die die Grundlage des sog. Ptolemäischen Weltsystems (s. u. S. 35) bildet.

Von mittelbarem großem Einfluß auf die Mathematik war auch die um jene Zeit erfolgte Einführung des babylonischen Sechzigersystems in die Astronomie. Während man im gewöhnlichen Leben und meist in der Wissenschaft die altägyptischen Stammbrüche (s. o. S. 6) beibehielt, führten die Astronomen die Sexagesimalbrüche ein, die sich bis ins 17. Jahrhundert erhielten, und teilten den Kreis in Grade, Minuten und Sekunden (zum erstenmal bei Hypsikles, 2. Jahrhundert), wie wir es noch heute tun. Die Astronomen waren es auch, die, wohl auch in Anlehnung an babylonische Vorbilder, die ersten Grundlagen der Trigonometrie schufen. In einer erhaltenen kleinen Schrift des Aristarchos von Samos (um 270), wo er im Anschluß an Eudoxos mittels der noch heute üblichen Methode der Monddistanzen Größe und Entfernung von Sonne und Mond zu bestimmen sucht, findet man zum erstenmal Werte für trigonometrische Verhältnisse (z. B. $\frac{1}{20} < \sin 3^0 < \frac{1}{18}$). Nicht erhalten sind die Werke des „Vaters der Astronomie", Hipparchos von Nizäa (um 150), der als eigentlicher Schöpfer der Trigonometrie gelten darf. Von ihm stammt eine Tafel der Sehnenlängen bei bekanntem Kreisdurchmesser, und es ist kaum ein Zweifel, daß er auch schon einfache Formeln der sphärischen Trigonometrie besaß, um die Sehnentafel anzuwenden. Hipparchos soll ferner über quadratische Gleichungen

geschrieben haben, die wir in rechnerischer Form zum erstenmal bei Heron (s. u. S. 31) auftreten sehen.

Auch die Geographie, insbesondere die Erdmessung, deren erste der alexandrinische Bibliothekar Eratosthenes (geb. 276 oder 275 zu Kyrene in Nordafrika; s. o. S. 23) ausführte, bedurfte der Mathematik als Hilfswissenschaft und förderte so indirekt deren Entwicklung. Die selbständigen mathematischen Leistungen des Eratosthenes sind unbedeutend. Es sei nur sein „Sieb" erwähnt, eine wenig praktische Methode zur Auffindung aller Primzahlen. Wir schließen die Schilderung dieser glänzendsten Periode der griechischen Mathematik mit Nikomedes, von dem man weiß, daß er um 180 lebte. Er erfand die heute noch allgemein bekannte „Konchoide" (Muschellinie), die durch ihre einfache Erzeugung auffällt und sich zur Lösung aller Arten von Einschiebungsaufgaben eignet.

### C. Griechische Nachfahren und Römer.

Die zwei ersten Jahrhunderte v. Chr. zeigen zwar immer noch eifrige Arbeit; aber es fehlen die neuen und großen Gesichtspunkte. Schon Hipparchos (s. o. S. 27) trägt solche Züge, bei aller sonstigen Bedeutung, die ihn unter die Klassiker stellt. Einesteils ist das die natürliche Erscheinung in einer nachklassischen Zeit; andernteils verhinderte der gegenseitige Kampf der griechischen Staaten, die schließlich im Jahre 146 der Römerherrschaft verfielen, die Unterstützung der Wissenschaft durch die Fürsten immer mehr. Zudem büßte Alexandria durch die Mißwirtschaft Ptolemaios' VII. Physkon (145—116) seine geistige Führerschaft ein, während ein neues Zentrum doch nicht hochkam. Als bei der Eroberung durch Julius Cäsar (im Jahre 47) ein Teil der Bücherschätze in Alexandria verbrannte, wo die mittels Rohrfeder und Rußtinte auf Papyrusrollen geschriebenen Werke, von denen

nicht allzu viel Abschriften umliefen, lagerten, war ein wichtiges Hilfsmittel der Gelehrten vernichtet. Durch die Seeschlacht von Actium gewann Octavian im Jahre 31 auch ganz Ägypten den Römern.

Wenig weiß man von den Lebensumständen der damaligen Mathematiker, deren Werke auch meist nicht erhalten sind. Ein gewisser Diokles, offenbar ein Zeitgenosse des vorhin erwähnten Nikomedes, erfand die Kissoide, auch zur Konstruktion zweier mittleren Proportionalen (s. o. S. 12). Bedeutenderes von ihm ist offenbar verloren. Perseus schrieb im 2. Jahrhundert eine Abhandlung über den Kreiswulst (Speira) und dessen ebene Schnitte, die heute noch „spirische Linien des Perseus" heißen. Von Zenodoros sind 14 Sätze über isoperimetrische Figuren überliefert, die Geschick zeigen. Der Begriff der Spirale wurde im Anschluß an Archimedes (s. S. 22) und Apollonios (s. S. 26) von einem Unbekannten auf die Kugel ausgedehnt. In diese Zeit gehört auch die schon erwähnte Arbeit des Hypsikles (s. o. S. 17) über regelmäßige Körper und wohl auch die, älteres Gut zusammenstellende, erhaltene Sphärik des Theodosios. Die Lösung einer Archimedischen Aufgabe dritten Grades durch Kegelschnitte von einem Dionysodoros ist, wie dessen Schrift über den Kreiswulst, verloren, ebenso das, was der volkstümliche Philosoph, Geograph und Astronom Poseidonios von Rhodos über Geometrie schrieb. Aus einem sonst unbekannten Werk des Geminos von Rhodos (um 70) sind Stellen überliefert, die für uns mangels anderer Quellen von historischem Wert sind.

Wir setzen hierher auch noch einen anderen mehr praktisch gerichteten Schriftsteller, Heron aus Alexandria, wenn es auch nicht sicher ist, ob er nicht im 1. bis 2. Jahrhundert n. Chr. gelebt hat. Von Heron ist viel erhalten, die Mechanik allerdings nur arabisch. Trotz großer Mängel

haben Herons Schriften über das ganze Mittelalter, zum Teil bis in den Beginn der Neuzeit herein, einen bedeutenden Einfluß ausgeübt. Für uns sind sie von Wert, weil sie fast die einzige Quelle sind, die uns Aufschluß über die praktische Mathematik der Griechen gibt, die sicher neben der wissenschaftlichen immer bestand, aber von der „Schule" beiseitegesetzt, wohl auch gering geachtet wurde. War doch schon des Archimedes rechnerische Behandlung der Kreisquadratur (s. o. S. 22) eine entscheidende Neuerung.

Wir können die mechanischen und hydraulischen Spielereien, die Heron zusammengestellt hat und auf die noch die Straßburger Uhr (nach einem Original aus dem 15. Jahrhundert) und die Wasserkünste des Schlosses Hellbrunn bei Salzburg (1613/15 erbaut) zurückgehen, nur streifen und weisen auch nur hin auf seine Anleitung zur Feldmessung („Dioptra"). Daß Heron mit Feldmessung zu tun hatte, wird auch bewiesen durch eine von ihm verfaßte Vermessungslehre („Metrika"), die erst 1903 nach einem wieder aufgefundenen Konstantinopeler Kodex herausgegeben wurde. Es ist das fast eine Fortsetzung der Geometrie des Aḥmes und der anderen ägyptischen Papyrusreste (s. o. S. 6), eine Regelsammlung in Zahlenbeispielen und theoretischen Ausführungen, aber auch nach Näherungsformeln, zur Berechnung von Flächen und Körpern. Neben dieser ägyptischen Grundlage hat aber Heron die Fortschritte, die Euklid und besonders Archimedes gebracht hatten, ausgiebig benützt. Im 1. Buche (wie in der „Dioptra") findet sich die Formel für die Dreiecksfläche (s. o. S. 24) mit (geometrischem) Beweis, dann werden die Flächen der regelmäßigen Vielecke vom Dreieck bis zum Zwölfeck berechnet (für $s_7$, $s_9$, $s_{11}$ werden gute Näherungen gegeben), es folgen Kreisabschnitt, Ellipse, Parabel und die Oberflächen der einfachen krumm-

flächigen Körper. Im 2. Buche werden die Rauminhalte der einfachen Körper, mit Einschluß von Pyramiden-(Kegel-)stumpf und Obelisk, der 5 regelmäßigen Körper, des Kreiswulstes und Zylinderhufes berechnet, zum Teil unter Benutzung des von Archimedes stammenden, heute nach Cavalieri (s. u. S. 104) benannten Prinzips. Stellenweise fehlen auch die Ableitungen. Ein 3. Buch gibt Aufgaben über Teilung von Flächen und Körpern, die, wenn irgend möglich, rechnerisch gelöst werden. Heron zeigt auch ausführlich, wie er seine Quadrat- und Kubikwurzeln berechnete, und es ist nicht unmöglich, daß Archimedes dieselbe Methode besaß. Für Quadratwurzeln wendet Heron nach unserer Ausdrucksweise die Näherungsformel $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$, deren Vorhandensein in Babylon wir schon angedeutet haben (s. o. S. 8), wiederholt an, während er für Kubikwurzeln wohl eine entsprechende Formel hatte. Bemerkenswert ist im 3. Buch auch die Angabe der Wurzel einer vollständigen quadratischen Gleichung (s. o. S. 28). Die Lösungsmethode fehlt zwar an dieser Stelle; aber aus einem Beispiele der „Geometrie“ kann man die verwendete Formel entnehmen, die mit der unseren im Wesen übereinstimmt.

Diese „Geometrie“ ist eine ziemlich ungeordnete Sammlung von allerlei geometrischen Berechnungsaufgaben. Sie ist in der vorliegenden Form allerdings wahrscheinlich eine spätere byzantinische (s. u. S. 38) Arbeit. In der erwähnten Aufgabe wird verlangt, den Kreisdurchmesser aus der Summe von Kreisfläche, Umfang und Durchmesser zu berechnen. Man sieht daraus, wie doch das arithmetisch-algebräische Denken auch neben der geometrischen Form sich entwickelt haben muß. Für einen „Geometer“ wie Euklid wäre die Aufgabe völlig sinnlos gewesen. Ob Heron wirklich einen Kommentar

zu Euklids Elementen schrieb, ist unsicher. Gewiß ist, daß ihm Spätere allerlei geometrische Sätze und Beweise zuschrieben; auch ist eine Sammlung „Definitionen“ gesondert erhalten.

Über die Römer zum Schlusse nur ein kurzes Wort. Sie haben, rein praktisch gerichtet, in keiner Wissenschaft, am allerwenigsten in der Mathematik, auch nur das geringste geleistet. Eine sehr magere Geometrie findet sich bei den Feldmessern; zur Kalenderverbesserung von Cäsar (46 v. Chr.), zur großen Reichsvermessung von Agrippa (um 30 v. Chr.) mußten alexandrinische Fachleute herangezogen werden. Nur bei Technikern zeigt sich vereinzelt etwas mehr geometrisches Verständnis. Bei einem Feldmesser (der ersten Jahrhunderte n. Chr.) tritt die Summe der Kubikzahlen in einem Beispiel auf. Es ist aber zweifellos, daß auch das verlorene griechische Wissenschaft ist. Rechnen konnten die Römer verhältnismäßig gut. Ihre unpraktische Zahlenschreibung (altitalischen Ursprungs) freilich und ihr, wie es scheint, selbst erfundenes, auf 12tel gegründetes Bruchsystem, das mit der Einteilung der Münzeinheit, des As, zusammenhing, war auch der Rechenfertigkeit nicht günstig. Diese wurde aber unterstützt durch ein Rechenbrett (Abakus), dessen Ursprung wohl auch griechisch ist, und durch viel gebrauchte Rechentabellen.

Mit dem 5. Jahrhundert n. Chr. begann das weströmische Reich zu zerfallen. Erst um diese Zeit scheint man sich in Rom mehr mit griechischer Mathematik befaßt zu haben. 476 an Odoaker gefallen, 493 von Theodorich erobert, war Rom nun in der Hand der Germanen. Ein Name allein ragt aus jener Zeit hervor. Boëtius, ein vornehmer christlicher Römer, geb. um 480, aus politischen Gründen im Jahre 524 durch Theodorich hingerichtet, schrieb eine Arithmetik und eine Musik. Eine Geometrie, die man ihm bis in die neueste Zeit zuschrieb, ist zweifellos

eine Fälschung und stammt aus dem 11. Jahrhundert. Eine Euklidübersetzung ging verloren. Diese Bücher und noch mehr seine im Kerker verfaßten „Tröstungen der Philosophie", wie auch sein (unbegründeter) Ruf als Märtyrer, machten ihn zum Abgott des christlichen Mittelalters. Dadurch hat er entschieden großen Einfluß, besonders auf die mathematische Bezeichnungsweise, aber auch auf die Fortpflanzung mathematischer Kenntnisse ausgeübt, das letztere insbesondere auch deshalb, weil das von ihm aufgestellte „Quadrivium" (viergeteilter Weg) für den Elementarunterricht Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie umfaßte. Seine „Arithmetik", um die es sich für uns allein handelt, ist eine nicht sehr geschickte, keinerlei Eigenart aufweisende, oft unnötig verwickelte Bearbeitung der Arithmetik des Nikomachos (um 150 n. Chr.; s. unten). Sie war nichts weniger als geeignet, dem Mittelalter als Lehrbuch zu dienen. Aber es gab nichts Besseres.

### D. Nachblüte und Ausklang der griechischen Mathematik.

Eine so hochentwickelte Wissenschaft, wie die griechische Mathematik, konnte auch unter ungünstigen Verhältnissen nicht ohne weiteres aussterben. Das zeigte sich sofort, als mit dem 2. Jahrhundert n. Chr., das ein Historiker als die glücklichste Zeit der Menschheit bezeichnet hat, die Kaiser von Trajan bis Marc Aurel über dem großen römischen Reich, in das wir wieder zurückkehren, regierten. Freunde der Wissenschaft und der Griechen, haben sie eine zweite Blüte auch der Mathematik herbeigeführt,

Wir wollen zuerst gleich wieder Nikomachos (siehe oben) nennen, der aus Gerasa in Syrien stammte. Sein Werk ist die erste eigentliche griechische „Arithmetik", vorbereitet durch die Zahlenrechnungen des Archimedes, Heron und ihrer Nachfolger, begünstigt durch das Wieder-

aufleben der Pythagoreischen Zahlenmystik (s. o. S. 9), wozu schon Poseidonios (s. o. S. 29) den Anstoß gegeben hatte. Was Nikomachos bringt, steht zum Teil schon bei Euklid (z. B. das Zahlentheoretische), anderes (z. B. die Ausführungen über Vielecks- und Pyramidalzahlen) in verlorenen Schriften des Hypsikles (s. o. S. 17) und anderer. Neu ist vielleicht die Darstellung der Kubikzahlen als Summen von ungeraden Zahlen, woraus die S. 32 erwähnte Summierung leicht hätte abgeleitet werden können. Das elementare Zahlenrechnen setzt auch Nikomachos voraus. Das schriftliche Rechnen war übrigens auch bei den Griechen sehr umständlich, da sie (wie später die semitischen Völker) als Ziffern die Buchstaben ihres Alphabetes in der Reihenfolge 1, 2,...9, 10, .... 90, 100, ... 900 benutzten. Eine ähnliche, aber weniger bedeutende und einflußreiche Schrift, hat, vielleicht etwas früher, der Astronom Theon von Smyrna, auch ein Neupythagoreer, geschrieben. Sie bildet einen Teil eines Werkes, das zur Einleitung in die Lektüre Platons dienen sollte. Wir fügen gleich bei, daß der Neuplatoniker Iamblichos, ebenfalls ein Syrer, aus Chalkis, im Anfang des 4. Jahrhunderts Anmerkungen zu Nikomachos verfaßte. Auch eine philosophische Einleitung in die Mathematik hat er, als Teil ein und desselben Sammelwerkes, hinterlassen.

Schon um die Wende des 1. Jahrhunderts n. Chr. finden wir zu Alexandria einen trefflichen Astronomen, der eine selbständig gearbeitete Sphärik in 3 Büchern verfaßte, die in hebräischen und arabischen Übersetzungen auf uns kam. Im ersten Buch gibt Menelaos eine sich eng an die Euklidische Behandlung des ebenen Dreiecks anschließende Lehre vom sphärischen Dreieck. Das zweite Buch ist astronomischen Inhalts. Im dritten aber leitet der Verfasser, mittels des nach ihm noch heute benannten ebenen Transversalensatzes den sphärischen ab. Auf diese „Regel

der 6 Größen" gestützt, kann er dann einige andere Sätze über die Sehnen sphärischer Dreiecke ableiten, die als Grundlage der sphärischen Trigonometrie der Griechen und Araber betrachtet werden können. Dabei tritt auch der Satz von der Projektivität der Doppelverhältnisse, wie wir heute sagen, ohne Beweis auf. Menelaos' eigene Sehnenberechnungen sind wie die Hipparchs (s. o. S. 27) verloren gegangen.

Auf Hipparch, Menelaos und den oben erwähnten Theon (s. o. S. 34) stützte sich der vielseitige Klaudios Ptolemaios, der zwischen 125 und 151 in Alexandria astronomische Beobachtungen anstellte und jenes berühmte Werk in 13 Büchern verfaßte, das die Araber in merkwürdiger Verballhornung „Almagest" (= „das größte", nämlich Buch) nannten. In diesem Werk, dessen bester Kern wohl Hipparch zu verdanken ist, gibt Ptolemäus, immerhin nicht unselbständig, eine Zusammenfassung der damaligen astronomischen Kenntnisse und des trigonometrischen und rechnerischen Könnens. Das ziemlich verwickelte Weltbild, dessen einfachere Züge wir ja noch heute benützen, stützt er auf seine eigene Theorie der exzentrischen Kreise für die Planetenbahnen, die er der Apollonischen Epizyklentheorie (s. o. S. 27) als gleichwertig an die Seite stellt.

Das 9te Kapitel des 1. Buches ist der Berechnung der Sehnen gewidmet. Ptolemäus geht von dem nach ihm benannten Satz über die Seiten und Diagonalen eines Sehnenvierecks aus, um, wie wir heute sagen, die Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und die Halbwinkelformeln abzuleiten. Für Ptolemäus handelt es sich aber immer um Beziehungen zwischen ganzen Sehnen, die sich freilich leicht in unsere Formeln übertragen lassen. Seine Tafel ist nach unserer Ausdrucksweise auf 5 Dezimalen genau und schreitet von 30 zu 30 Minuten fort. Das 11. Kapitel enthält dann

die sphärische Trigonometrie, insofern als (ohne Namennennung) der Satz des Menelaos auf die Aufgaben der sphärischen Astronomie angewendet wird, wobei nur rechtwinklige Dreiecke in Betracht gezogen werden. Aus den Lösungen kann man 4 unserer 6 Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck entnehmen. Ebene Trigonometrie kommt da und dort verstreut im ganzen Werk vor. Es werden auch da schiefwinklige Dreiecke immer durch eine Höhe in zwei rechtwinklige zerlegt.

Wir können das (griechisch nur in Bruchstücken erhaltene) „Analemma" (d. h. Projektionsfigur) des Ptolemäus nur erwähnen, das graphische und rechnerische Methoden zur Lösung der mathematisch-geographischen Aufgaben enthielt. Auch die noch vorhandene „Geographie" des Ptolemäus birgt mancherlei Mathematisches, besonders über Projektionen. In dem nur in lateinischer Übersetzung vorhandenen „Planisphärium" ist die später „stereographische Projektion" genannte Abbildungsart, die wohl auch auf Hipparch zurückgeht, zur Abbildung der Himmelskugel benützt.

Zum Almagest des Ptolemäus schrieb Ende des 3. Jahrhunderts Pappos von Alexandria einen Kommentar, der vielleicht 100 Jahre später (um 370) von Theon von Alexandria fortgesetzt wurde. Letzterer enthält eine ausführliche Behandlung des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen. Ersterer ist verloren; aber Pappos schrieb noch ein großes, recht verständiges „Sammelwerk", das uns erhalten ist. Dieses Werk enthält Auszüge aus den damals am meisten gebrauchten Lehrbüchern, mit Erläuterungen dazu, und ist so oft die einzige Quelle unserer Kenntnisse älterer, nicht mehr vorhandener Schriften. Zahlreiche Sätze finden wir dort zum erstenmal ausgesprochen, u. a. den später nach Guldin (s. u. S. 105) benannten über das Volumen von Rotationskörpern. Auch einen Kommentar

zu Euklid schrieb Pappos, von dem Reste erhalten sind, und auch diese Tätigkeit setzte der obige Theon fort, indem er den ganzen Euklid mit Erläuterungen herausgab.

Nochmals erstieg die griechische Mathematik einen Gipfelpunkt in jener Zeit (Ende des 3. Jahrhunderts), als Diophantos von Alexandria seine „Arithmetik" veröffentlichte. Neben Zahlentheorie wird hier zum erstenmal die Gleichungslehre an zahlreichen Beispielen ersten und zweiten Grades, mit einer und mehreren Unbekannten, mit erstaunlicher Kunstfertigkeit, aber ohne einheitliche Methode abgewandelt. Das Werk, von dem nur 7 Bücher (von 13) erhalten sind, macht einen ganz eigenartigen Eindruck, der nur davon herrühren kann, daß von den Vorgängern in dieser Art Mathematik jede Spur verloren ist. Die Bezeichnung „Diophantische Gleichungen", die wir heute noch haben, ist insofern nicht ganz richtig, als Diophant wohl viele unbestimmte Aufgaben (auch zweiten Grades) behandelt, niemals aber nur ganzzahlige Werte sucht, sondern sich mit rationalen begnügt.

Theon von Alexandria hatte eine Tochter Hypatia, die eine bedeutende Gelehrte gewesen sein soll († 415 bei einer Heidenverfolgung). Leider sind ihre Kommentare zu Diophant und Apollonios ganz verloren. Um jene Zeit trieb der Neuplatonismus, dem sie mit ihrem Vater zuzurechnen ist, in der neuen Hochschule von Athen einen Ableger. Wir haben von dort aus dem 5. Jahrhundert Proklos zu erwähnen. Dieser schrieb einen Euklidkommentar, von dem nur der zum 1. Buch gehörige Teil erhalten ist. Er ist uns immerhin wegen vieler historischer Notizen wertvoll. Dasselbe gilt von einem auch sonst vortrefflichen Kommentar, den Simplikios, einer der letzten Professoren der athenischen Universität (529 von Kaiser Justinian als „heidnisch" aufgehoben) zu Aristoteles' Schrift „Über den Himmel" schrieb. Sehr beachtens-

werte Erläuterungen zu Apollonios und Archimedes verfaßte sein Zeitgenosse Eutokios aus Askalon.

Immer mehr beschränkte sich das führende Griechentum auf den Orient, wo das sog. oströmische Reich, mit Byzanz (Konstantinopel) als Mittelpunkt, lange Zeit noch einen gewissen Glanz verbreitete, bis es 1453 den Türken erlag. Aus der späteren Zeit werden wir weiter unten (S. 55) einiges erwähnen. Hier sei aber noch Isidoros von Milet genannt, der mit Anthemios von Tralleis (in Kleinasien) im 6. Jahrhundert die berühmte Sophienkirche erbaute. Isidoros rettete des Eutokios Archimedesausgabe für uns durch Neuherausgabe und war des S. 17 erwähnten Damaskios Lehrer. Bedeutender als Mathematiker war wohl Anthemios. Von ihm gibt es ein Bruchstück über Brennspiegel, worin die bekannte Faden-(Gärtner-)Konstruktion der Ellipse zum erstenmal auftritt. Selbständige griechische Leistungen verklingen damit. Nie aber kam in Byzanz das Feuer des griechischen Geistes ganz zum Erlöschen. Von ihm zehrten Inder und Araber und zur Renaissancezeit loderte es zuerst in Italien neu auf, um dann ganz Europa leuchtende Wärme zu spenden.

# II. Mittelalter.

## 1. Die Inder.

Von der eigentlich mittelalterlichen Mathematik der Inder sondert sich ein Teil scharf ab, der noch ins Altertum gehört und den wir nur des allgemeinen Zusammenhanges wegen hierher verlegen. Es ist das die Mathematik, die in den „Śulvasūtras" (Seil-, d. h. Messungsregeln) niedergelegt ist, mathematischen Vorschriften, die den Handbüchern angehängt waren, worin die Arten der

religiösen Opfer beschrieben wurden. Śulvasūtras sind uns in drei ziemlich voneinander abweichenden Fassungen überliefert, nach verhältnismäßig jungen Handschriften, die nicht erkennen lassen, wann ihr Inhalt im einzelnen bekannt war. Die Vorschriften selbst sollen in der Zeit vom 8. Jahrhundert v. Chr. an in Übung gewesen, die Abfassung kann jedenfalls nicht später als 200 n. Chr. erfolgt sein. Die Vorschriften sind rein praktischer Art und beziehen sich auf die Errichtung und die Form der Opferaltäre. Sie enthalten den Pythagoreischen Lehrsatz in zahlreichen rationalen Beispielen (außer 3, 4, 5 z. B. 5, 12, 13; 8, 15, 17) und einigen irrationalen (z. B. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$), wobei in einer Fassung für $\sqrt{2}$ der Wert

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

benutzt wird. Mittels des Pythagoreischen Lehrsatzes werden Rechtecke und Quadrate ineinander verwandelt, ferner werden auch Näherungswerte für $\pi$ (wie wir es ausdrücken) gegeben, wovon einer ganz wenig größer als 3 ist, während der zweite durch eine Stammbruchreihe dargestellt wird, die durch eine gewisse Division mit der obigen Reihe für $\sqrt{2}$ entsteht und $\pi = 3{,}097$ ergibt. Die Verfasser der Śulvasūtras verstanden die Regeln sicher nur soweit, als sie deren zur Anwendung bedurften. Woher sie aber ihre Kenntnisse hatten, ist heute noch völlig ungeklärt. Es ist höchst unwahrscheinlich, daß sie aus einer einheimischen indischen Schule stammen; keiner der späteren Inder kennt z. B. oder erwähnt nur irgend etwas aus den Śulvasūtras. In Ägypten, woran man denken könnte, wegen der Stammbrüche und weil auch dort die Vermessungsbeamten „Seilknüpfer" hießen, sind solche Kenntnisse bis jetzt nicht nachgewiesen. Auch fehlt der engere

historische Zusammenhang, ebenso wie mit der Pythagoreischen Schule. Indien kam erst in einen näheren Verkehr mit Griechenland durch den Alexanderzug (327 v. Chr.). Insbesondere ist die Division mit einer Reihe auch für das spätere Griechenland nicht belegt. Es ist aber auch die schon ernsthaft vertretene Behauptung abzulehnen, daß etwa Pythagoras seinen Satz von den Indern übernommen habe. Wir stehen da noch vor einem reinen Rätsel.

Im Jahre 290 n. Chr. gründete König Gupta seine Dynastie, die zwar im 6. Jahrhundert wieder erlosch, aber eine noch bis ins 10. Jahrhundert nachwirkende Renaissanceperiode heraufführte. Dieser Aufschwung betraf zwar vor allem die Sanskritliteratur, erstreckte sich aber auch auf die Wissenschaft und hier wieder hauptsächlich auf die Astronomie. Es entstanden eine Reihe von „Systemen" (Siddhāntas), von denen das Sūrya Siddhānta (System der Sonne; um 400) das bedeutendste ist. Alle diese Siddhāntas verraten innerhalb der astronomischen Aufgaben nicht unbedeutende trigonometrische Kenntnisse. Es finden sich mindestens Spuren des allgemeinen sphärischen Sinus- und Kosinussatzes, sowie der sog. 5-Stückeregel. Freilich war den Indern weniger als den Griechen, auf deren Astronomie die indische durchaus aufgebaut ist, um die theoretische Durchdringung des Stoffes zu tun. Das wichtigste ist, daß dort zum erstenmal statt der ganzen Sehnen die halben, also unsere Sinus, eingeführt werden. Das früheste Werk dieser Art ist das Siddhānta Pauliśa (um 380) und dieses geht, wie schon der Name verrät, auf einen Griechen, einen durch eine astrologische Schrift bekannten Paulus von Alexandria, zurück. Bei Paulus tritt der sehr genaue Wert $\pi = 3\frac{177}{1250}$ (= 3,1416) auf, den auch Āryabhaṭa (s. u.) hat. Dieser Wert ist damit als griechisch erwiesen. Nach

den erst in der allerneuesten Zeit bekannt gewordenen Leistungen des Archimedes (s. o. S. 22) hat der Wert die historische Bedeutung ganz verloren, die man ihm früher, als man ihn noch Āryabhaṭa zuschrieb, beilegte. Gerechnet haben übrigens weder Paulus noch Āryabhaṭa damit, sondern sie benutzten einen Näherungswert von $\sqrt{10}$.

Mehrere der „Systeme“ enthalten einen eigenen Abschnitt über Mathematik. Das ist schon der Fall in dem astronomischen Werk des Āryabhaṭa, wenn es auch nicht ganz sicher ist, ob gerade dieser Abschnitt nicht von einem anderen Āryabhaṭa aus dem 10. Jahrhundert stammt. Der ältere Āryabhaṭa wurde in dem Jahre (476) des Untergangs des weströmischen Reiches (s. o. S. 32) geboren, mit dem die Geschichtswissenschaft das Mittelalter beginnen läßt. Die ganze Mathematik bei Āryabhaṭa ist allerdings auf 33 kurze Verspaare zusammengedrängt, die nur Regeln ohne Beispiele enthalten und schon wegen der Versform, in der all diese indischen Werke geschrieben sind, häufig schwer zu deuten sind. Es sind u. a. Dreisatzaufgaben (für die wir bisher schriftliche Belege bei den Griechen nicht haben), Zins- und Mischungsrechnungen, Näherungswerte für Quadrat- und Kubikwurzeln, Gleichungen ersten und zweiten Grades, dann Flächen- und Körperberechnungen, darunter viele falsche Formeln, die wir zum Teil schon bei den Ägyptern fanden, die aber auch in chinesischen Werken der Zeit Āryabhaṭas und in späteren indischen Schriften vorkommen. Unter den linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten findet sich auch das sog. „Epanthem“ (Nebenblüte[1]) des Thymaridas, eines älteren Pythagoreers, von dem uns Iamblichos (s. o. S. 34) berichtet

[1]) Allgemeiner Ausdruck für „Zusätze“ in Lehrbüchern der Arithmetik.

hat. Das Bemerkenswerteste ist aber, daß sich bei Āryabhaṭa die Kettenbruchlösung der unbestimmten Gleichung ersten Grades andeutungsweise findet. Die Inangriffnahme dieser Gleichung und ihre Lösung in ganzen Zahlen hängt sehr wahrscheinlich mit der Berechnung des christlichen Osterfestes, im weiteren Sinne mit Planetenkonstellationen zusammen. Āryabhaṭa dürfte also nicht der Erfinder dieser Methode sein.

Viel vollständiger ist das mathematische Kapitel in Brahmaguptas (geb. 598) astronomischem Werk, zu dem zwei Nachfolger Mahāvīra (ungef. 9. Jahrhundert) und Śridhara (geb. 991) nur wenig Neues hinzufügten. Bhāskara (geb. 1114) gibt wieder eine ausführliche Darstellung, zeigt aber deutliche Spuren des Verfalls. In dieser Periode treten auch wieder rationale rechtwinklige Dreiecke (doch in anderer Weise wie in den Śulvasūtras) auf. Geometrie ist nur ganz flüchtig behandelt. Neu ist bei Brahmagupta die sog. Heronsche Formel für die Dreiecksfläche (s. o. S. 24), die auf das Sehnenviereck ausgedehnt wird, von dem auch die Diagonalen (aus den 4 Seiten) berechnet werden. Das Wichtigste sind wesentliche Fortschritte über das hinaus, was von Diophants unbestimmter Analytik erhalten ist. Die Inder dieser Zeit suchen zum erstenmal ganzzahlige Lösungen und nicht eine einzelne, sondern möglichst alle. Es werden sowohl lineare als quadratische Gleichungen dieser Art mit einer und mehreren Unbekannten in Betracht gezogen. Das Beste ist wohl die „zyklische Methode“ zur Lösung der sog. Pellschen Gleichung $Du^2 + 1 = t^2$ (s. u. S. 127), die von Bhāskara gegeben wird. All das ist aber kaum eingeboren indisch, sondern vermutlich spät griechisch. Vermittler waren vielleicht auch die Perser, die während der Sassanidenherrschaft (229—552) eine Blütezeit erlebten, zum Teil auch die Chinesen, von denen wohl manches direkt

entlehnt wurde, wie die Bezeichnung der Unbekannten durch Farbennamen und zahlreiche Einzelbeispiele. Von Kegelschnitten weiß nur Mahāvīra ein weniges. Die arithmetische Symbolik, als deren Begründer man Diophant ansehen kann, schreitet in den indischen Werken, je später sie geschrieben wurden, desto mehr fort. Mit aus diesem Grunde muß auch ein in neuester Zeit bei Bakhshālī in Nordwestindien gefundenes Bruchstück eines Rechenbuches etwa ins 12. Jahrhundert verlegt werden. Von Brahmagupta an bis zum Bakhshālībruchstück finden wir negative Zahlen im Gebrauch. Bhāskara lehnt selbst die zweite Wurzel einer quadratischen Gleichung, auch wenn sie negativ ist, nicht ganz ab.

All das hätte aber den Indern nicht den Ruf verschafft, den sie haben, schriebe man ihnen nicht die Erfindung unserer Ziffern mit dem für die ganze Kulturwelt so wichtigen Stellenwertsystem zu. Daß es ein Stellenwertsystem schon bei den Babyloniern und den Maya gab, wissen wir (s. o. S. 7/8). Das Entscheidende ist aber seine Verbindung mit dem Zehnersystem. Man kann eine solche allerdings schon in den Archimedischen Oktaden und Perioden (s. S. 21) und besonders in der von uns nur angedeuteten Verbesserung dieser Zahlenschreibung durch Apollonios (s. S. 26) erblicken. Aber die 10 Ziffern, vor allem die so wichtige Null, finden sich zuerst in Indien. Freilich haben sie zahlreiche Wandlungen, schon in Indien, und dann bei den Arabern und im lateinischen Mittelalter durchgemacht, bis sie etwa seit dem 16. Jahrhundert unsere heutige Form annahmen. In Indien treten sie auf wirklichen Urkunden seit dem 12. Jahrhundert auf, neben älteren Zahlenschreibungen. Auch aus dem 11. Jahrhundert gibt es sichere Belege. Frühere Urkunden (es sind das meist Kupferplatten mit bürgerlichen Verträgen) wurden vielfach als Fälschungen erkannt. Doch gibt es eine etwa aus

dem Jahre 813, die nicht ganz unsicher ist. Eine kreisförmige Null kommt zum erstenmal inschriftlich im Jahre 876 vor, eine punktförmige schon 874 in einer arabischen Handschrift. Aber wir haben eine Briefstelle des syrischen Gelehrten Severus Sabokht aus dem Jahre 662, in der er schon „von der unübertroffenen Rechenmethode der Inder mit den 9 Zeichen" spricht. Ob nun die Inder diese Ziffern, deren älteste Form weder aus den anderen indischen Zahlbezeichnungen noch auch aus dem Sanskritalphabet ableitbar ist, selbst erfunden haben, steht dahin. Wenn es nicht der Fall ist, wie in neuester Zeit wahrscheinlich zu machen versucht wurde, kann eine Weiterbildung der griechischen Zahlenschreibung als nicht ganz ausgeschlossen gelten.

Zur Aussprache: ś = sch, sh = sch, kh = ch (Kehllaut), alles übrige ungefähr wie im Deutschen.

## 2. Die Araber.

Umgeben von Ägyptern, Juden, Syrern, Babyloniern und Persern, waren die Bewohner der arabischen Halbinsel zwar an den Rändern von den auf- und niedergehenden Kulturen beeinflußt, nie aber, infolge der isolierten Lage und des Wüstencharakters im Innern politisch unterjocht worden. Weltgeschichtliche Bedeutung gewannen die Araber erst, als sich in Mekka, dem seit alter Zeit geheiligten Herzen Arabiens, ein Feuer entzündete, das, zuerst rein religiös, bald nationale Formen annahm und wie ein Brand über die heimischen Grenzen hinausgriff. Im Jahre 622 n. Chr. floh der Prophet Mohammed († 632) von Mekka nach Medina und nach nicht ganz hundert Jahren unterstanden nicht nur alle Randstaaten der Macht der Kalifen, sondern von Ägypten aus, das 641/42 erobert wurde, hatte sich das arabische Schwert seinen Weg längs der Nordküste Afrikas

gebahnt und fast das ganze Spanien in seine Gewalt gebracht. Dort schuf ʿAbdarraḥmān 756 ein von Bagdad unabhängiges Kalifat mit dem Sitz in Cordoba. Um das Jahr 800 darf der Durchdringungsprozeß soweit abgeschlossen gelten; daß die Kultur in diesem ganzen Gebiete als arabisch in Sprache und Schrift bezeichnet werden kann. Dem politisch-religiösen Siegeszug folgte eine kulturelle Blüte, die im Osten etwa bis zum 13. Jahrhundert, im Westen etwas länger dauerte.

Die Mathematik verdankt dem so erweiterten Arabertum nicht nur die Überlieferung vieler griechischen Werke (s. z. B. S. 26), sondern in mehreren Zweigen auch die Fortbildung griechischen und zum Teil vielleicht auch indischen Wissens. Die griechische Wissenschaft war zwar in Alexandria unter den Sektenkämpfen der Christen allmählich erloschen, aber außer in Byzanz (s. o. S. 38) wirkte sie auch in Persien fort. Dorthin waren nach Schließung der zweiten Athener Universität (s. o. S. 37) sieben Professoren, darunter Simplikios, ausgewandert. Auch christliche Syrer übermittelten griechische Lehre. Diesem Einfluß waren die Araber schon ausgesetzt, bevor sie selbst sich, etwa von 750 an, der Übersetzertätigkeit zuwandten. Im Jahre 773 kam ein Siddhānta, wahrscheinlich das von Brahmagupta verfaßte (s. o. S. 42), an den Hof Almanṣūrs und wurde, wie es scheint, im Original benutzt. Auch bei den Arabern (s. o. S. 39) wurde die Astronomie vielfach wegen religiöser Vorschriften und der Astrologie zuliebe gepflegt. Unter den Kalifen Almanṣūr (754—775) und Hārūn Arrašīd (786—809) wurden der Almagest (s. o. S. 35), Euklids Elemente (s. S. 17) und wohl auch schon Nikomachos (s. o. S. 33) übersetzt. Andere Werke des Euklid und Archimedes folgten. Vollkommenes lieferte aber erst der Heide Ṯābit ibn Qurrah (geb. 826 in Ḥarrān im nördlichen Mesopotamien),

der auch selbständige Schriften über die Quadratur der Parabel und des Paraboloids hinterließ, deren erstere sein Enkel Ibrāhīm ibn Sinān ganz wesentlich verbesserte. Doch schon vorher hatte eigene arabische Mathematik mit einem wuchtigen Schlage eingesetzt. Geboren in Ḫwārazm, dem heutigen Chiwa, kam der Perser Muḥammad ibn Mūsā (d. h. Mohammed, Sohn des Moses) mit dem Beinamen Alḫwārazmī (d. h. der Chwarasmier) nach Bagdad zu dem Kalifen Almaʾmūn (813—833), wo er sich als Astronom und Geograph auszeichnete. Mit der Mathematik ist er unsterblich verbunden durch sein Werk „Alǵabr wʾalmuqābalah“ (d. h. etwa „Die Ergänzung und die Ausgleichung“). Der erste Teil dieses Titels wird als „Algebra“ der ganzen Welt bis in unabsehbare Zeiten bekannt bleiben. Es bedeutete das für Alḫwārazmī ursprünglich den Ersatz eines negativen Gleichungsgliedes durch das gleiche positive auf der anderen Seite. Das ist freilich etwas modern ausgedrückt, da Alḫwārazmī keinerlei Abkürzungen oder Symbole benutzte, sondern alles noch in Worten ausschrieb. Der zweite Teil des Titels, der sich im lateinischen Mittelalter allmählich verlor, bedeutete die Ausgleichung eines positiven Gliedes der einen Gleichungsseite gegen ein größeres positives Glied der anderen Seite.

Mit seinem Werk beabsichtigte Alḫwārazmī eine Sammlung von Vorschriften und Beispielen besonders aus der Praxis der Testamentsvollstrecker, dann aber auch der Vermessungsbeamten, Kaufleute und Bankhalter zu geben. Die oft sehr verzwickten Erbteilungsaufgaben, die auf lineare Gleichungen führen, treten in Form und Lösung hier zum erstenmal auf und haben auch in den knifflichen, aber mehr rätselartigen Testamentsaufgaben römischer Juristen (2./3. Jahrhundert n. Chr.) kein eigentliches Vorbild. Das Erbrecht ist ja in den großen Zügen das im Koran

festgelegte; aber die Einzelheiten der mannigfaltigen Aufgaben und vor allem das Geschick in der Lösung lassen Alḫwārazmī doch wohl nur als vielleicht ersten, aber selbständigen Bearbeiter eines vorliegenden Stoffes erscheinen. Viel weniger vollkommen ist die Sammlung der Beispiele von kaufmännischen Aufgaben, die, wie auch zum Teil die Erbteilungen, durch Dreisatz gelöst werden. Hier sind die Ausdrücke vielfach denen der Inder entsprechend (s. S. 41) und diese Aufgabengruppe beruht wohl auf gemeinsamer griechischer, wenn auch nur mündlicher Überlieferung. Für den Feldmesser ist ein kurzes Kapitel mit wenigen Definitionen, Sätzen, (darunter dem Pythagoreischen Lehrsatz) und Berechnungsformeln vorhanden. Für $\pi$ sind die drei Werte $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$ (s. o. S. 40) angegeben. Was aber dem Buch das ganze Mittelalter hindurch den größten Ruf verschafft hat und mehrere lateinische Übersetzungen hervorrief, dem Verfasser jedoch wohl nur als gelehrte Beigabe diente, das ist die Auflösung der quadratischen Gleichung in ihren verschiedenen Formen, die er als Einleitung vorausschickte. Diese Lösungen gehen unmittelbar auf Diophant zurück, wogegen nicht spricht, daß Diophants Arithmetik erst im 10. Jahrhundert ins Arabische übertragen wurde. Auch aus Euklids Elementen konnten sie entnommen werden. Neu ist aber, daß Alḫwārazmī den Lösungen geometrische Erläuterungen zur Veranschaulichung beifügt.

Die Beurteilung dieses Werkes ist etwas erschwert durch den Umstand, daß die Überlieferung auf einer einzigen sehr späten Handschrift (des Jahres 1342) beruht. Noch mehr ist das der Fall mit einer nur lateinisch auf uns gekommenen Einleitung in das Rechnen mit den indischen Ziffern (s. o. S. 43), die Alḫwārazmī (latinisiert Algorithmus, oder ähnlich) zugeschrieben wird, in der vorliegenden Form aber sicher nur eine Bearbeitung ist. Da

von den über viele Jahrhunderte hinaus, bis zum völligen Niedergang der islamischen Kultur auch in Spanien (15. Jahrhundert; s. u. S. 54), sich erstreckenden Nachfolgern in der Erbteilungsrechnung bis heute nichts zugänglich ist, haben wir zu Alḫwārazmī nur noch zu bemerken, daß er in seinen astronomischen Tafeln, von denen eine Bearbeitung bekannt ist, nicht nur die Sinus- (s. o. S. 40), sondern auch schon die Tangensfunktion aufstellt. Auch Sekans findet sich um dieselbe Zeit in anderen Tafeln. Die beiden letzteren Funktionen werden aber nur in der Gnomonik (Berechnung von Sonnenuhren) verwendet.

Neben Alḫwārazmī lebten am Hofe Almaʾmūns, der die Wissenschaft außerordentlich förderte, noch die Banū Mūsā (d. h. die Söhne des Moses), drei Brüder, die, wie es scheint gemeinsam, eine Geometrie schrieben, die im Mittelalter auch ins Lateinische übersetzt wurde. Sie enthält manches für die Araber damals Neue, das im Euklid nicht enthalten war, wie die sog. Heronsche Dreiecksformel (s. o. S. 24) und die Gärtnerkonstruktion der Ellipse (s. o. S. 38). Den Apollonios (s. S. 24), sowie die Sphärik des Theodosios (s. S. 29) machte erst der schon erwähnte Ṯābit ibn Qurrah den Arabern voll zugänglich, während Diophant (s. S. 37) von dem Perser Abuʾlwafāʾ (2. Hälfte des 10. Jahrhunderts) übersetzt wurde. Beide leisteten auch Eigenes, der erstere in Zahlentheorie, der letztere in Berechnung von genauen Tafeln der Funktionen. Bei Abuʾlwafāʾ (und bei dem gleichzeitigen, aber räumlich weit entfernten Ibn Jūnus; s. u. S. 52) treten aber tg und ctg erstmals in Rechnungen auf; auch kannten beide die Halbwinkelformeln für cos $\alpha$ und sin $\alpha$. Die sphärischen Aufgaben wurden von diesen Astronomen, zu denen wir den etwas früheren Albattānī (lat. Albategnius), einen Syrer, fügen, fast nur geometrisch gelöst. Diese Lösungen in die Sprache der heutigen sphärischen

Trigonometrie zu übersetzen, ist nicht schwer. Bewußt waren diesen Männern aber wohl der Kosinus- und Sinussatz noch nicht, wie man aus ihren an Projektionen anknüpfenden Überlegungen herauslesen kann. Bei Abuʾlwafāʾ ist in einer auch sonst bemerkenswerten Schrift über geometrische Konstruktionen das erste Auftreten von Aufgaben mit fester Zirkelöffnung hervorzuheben, bei Ṯābit ibn Qurrah die erste Beschäftigung mit magischen Quadraten, von denen wir bei den Griechen einstweilen nur eine Andeutung kennen (Theon von Smyrna; s. o. S. 34), während sie bei den Chinesen älter sein sollen. Späterhin spielten die magischen Quadrate bei den Arabern eine große Rolle, schon weil sie aus astrologischen Gründen auch auf Amuletten getragen wurden. Von dem mit Ṯābit ibn Qurrah gleichzeitigen Astronomen Annairīzī (lat. Anaritius) müssen wir einen Euklidkommentar hervorheben, in welchem Stücke der Erläuterungen von Heron und Simplikios mit überliefert sind. Verschiedene andere Kommentare des fruchtbaren Abuʾlwafāʾ sind leider verloren.

Neben Abuʾlwafāʾ wirkte an der Sternwarte zu Bagdad noch Alkūhī. Er befaßte sich, wie der auch gleichzeitige Alsiǵzī mit der Winkeldrittelung und anderen kubischen Aufgaben, zum Teil nach Archimedes. Beide Geometer gaben Lösungen durch das Schneiden von Kegelschnitten. Von Alkūhī kennt man ferner eine Kubatur des Paraboloids. Es treten auch rationale rechtwinklige Dreiecke und höhere unbestimmte Gleichungen um jene Zeit auf. Der Perser Alḫoǵendī hat sogar versucht zu beweisen, daß die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in ganzen Zahlen nicht lösbar ist (s. u. S. 127). Mit quadratischen und kubischen Resten beschäftigte sich der persische Arzt und Philosoph Ibn Sīnā (lat. Avicenna). Er erzählt selbst, er habe (um 990) von einem Gemüsehändler indisches Rechnen

gelernt. Der Perser Albīrūnī, der zuletzt in Ġaznah in Afghanistan lebte und (um 1000) große Reisen in Indien machte, hat darüber ein eigenes Buch geschrieben, das nicht erhalten ist. Man weiß nur ganz wenig Mathematisches von diesem bedeutenden Manne. Er stellte kubische Aufgaben (u. a. die Neuneckskonstruktion), die Abu'lǵūd (samt der Konstruktion des Siebenecks) geschickt durch Kegelschnitte löste. Es handelte sich dabei immer schon um die graphische Bestimmung der Unbekannten aus der Gleichung, die dem Problem entsprach. Um diese Zeit tritt auch mit Sicherheit bereits der ebene Sinussatz (bei Abū Naṣr und Albīrūnī) auf.

Aus dem Beginne des 11. Jahrhunderts sind (von zahlreichen verlorenen) zwei wirkliche Rechenbücher erhalten, eines ganz vom griechischen Gesichtskreis aus und ohne Zahlzeichen geschrieben, das andere ganz modern, mit indischen Ziffern. Verfasser des letzteren, das damals wohl nur von wenigen gewürdigt wurde, war der Perser Annasawī, wie Alkarḫī, der Verfasser des ersteren, in Bagdad lebend. Von besonderem Interesse für uns sind in beiden Büchern die Methoden zur Wurzelziehung. Alkarḫīs Buch hat auch ein geometrisches Kapitel und findet seine Fortsetzung in einer Algebra, die ganz auf Diophant ruhend, doch über das uns von diesem Überlieferte in mehreren Punkten hinausgeht. Offenbar aus fremder Quelle stammend findet sich darinnen auch die Summierung der Reihe der Quadrat- und der Kubikzahlen (vgl. o. S. 32). Alkarḫī selbst gehört aber vielleicht die Behandlung von Gleichungen der Form $a x^{2n} + b x^n = c$ an.

Gegen Ende des 11. Jahrhunderts gelang es dem berühmten persischen Dichter und vielseitigen Gelehrten ʿOmar Alḫajjām die verschiedenen Lösungen von kubischen Aufgaben in ein System zu bringen, indem er die kubischen Gleichungen in Gruppen teilte und für jede Gruppe die

Lösung durch zwei Kegelschnitte angab. So unvollkommen das Ganze auch heute erscheinen mag, ist Alḫajjāms graphische Algebra doch als eine bedeutende selbständige Leistung zu betrachten. Biquadratische Gleichungen hielt Alḫajjām auf diese Weise nicht für lösbar, wiewohl andere Araber schon gelegentlich solche gelöst hatten. An eine algebraische Lösung auch der kubischen Gleichungen glaubte Alḫajjām aber überhaupt nicht.

Unterdessen hatte sich muslimische Mathematik auch nach dem Westen geschoben, wo sie sich ziemlich unabhängig entwickelte. Wir wollen aber noch derjenigen östlichen Mathematiker gedenken, die inmitten der Kämpfe mit Christen, Mongolen und Tataren in den nächsten Jahrhunderten Hervorragendes leisteten. Es ist das vor allem Naṣīr eddīn (1201—1274) aus Tūs in der Landschaft Chorasan, der die meisten der oben erwähnten Perser entsprossen waren. Dieser selbständige Denker gab eine später viel gebrauchte Bearbeitung des Euklid heraus, worin er sogar einen Beweis des Parallelenpostulats versuchte (s. o. S. 18). Sein Hauptverdienst ist jedoch eine von der Astronomie ganz losgelöste Trigonometrie, die sich auf den Satz des Menelaos (s. S. 34) aufbaut. Naṣīr eddīn kennt alle 6 Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks (s. S. 36 u. 53), und weiß sogar die 6 Möglichkeiten beim schiefwinkligen Dreieck zu behandeln, wenn ihm auch die Formeln noch nicht in unserer heutigen Form zur Verfügung standen. Die Fälle mit den Winkeln führte er durch das hier zum erstenmal auftretende Polardreieck auf die mit den Seiten zurück. In der ebenen Trigonometrie ging er kaum über das schon Vorhandene hinaus.

Selbst ein Tatar, ein Enkel des Eroberers Timur, war der Astronom Uluġ Beg (1393—1449), den wir wegen der Genauigkeit der von ihm zu Samarqand berechneten astronomischen Tafeln erwähnen müssen. Diese Tafeln

traten den von Nāṣīr eddīn in 12jährigen Beobachtungen auf der Mongolensternwarte zu Marāgā erarbeiteten würdig an die Seite. All diese Tafeln beruhten auf sehr genauen Berechnungen von sin 1°, für die ein algebraisches Näherungsverfahren (es handelt sich wieder um eine kubische Gleichung) auch Alkāšī, dem Mitarbeiter Ulūġ Begs zugeschrieben wird. Alkāšī verfaßte ferner einen „Schlüssel der Rechenkunst", der eine, noch etwas ungefüge Formel für die Summe der vierten Potenzen der ganzen Zahlen (vgl. S. 50 u. S. 53) enthält. Mit Alkāšī endigt die Reihe der selbständigen Mathematiker des Ostens. Wie in Indien mit Bhāskara, können wir aber auch hier noch mit einem Spätling schließen, der nur mehr ein Sammler war. Behā eddīn schrieb um 1600, also zu einer Zeit, die wir in Europa schon zur Neuzeit rechnen würden, eine „Quintessenz der Rechenkunst", die deutlichen Verfall anzeigt.

Indem wir nun nach Westen gehen, haben wir zuerst drei Männer zu nennen, die in Ägypten wirkten. Wenig weiß man von Abū Kāmil, der um 900 lebte. Er muß ein bedeutender Algebraiker gewesen sein. Übersetzt ist lediglich sein „Buch der Seltenheiten der Rechenkunst", das unbestimmte Textaufgaben (ersten Grades; bis zu 5 Unbekannten) mit ganzzahligen Lösungen enthält, die bei Bhāskara (s. o. S. 42) und besonders im Mittelalter wiederkehren. Ibn Jūnus, in der neuen Hauptstadt Kairo geboren († 1008), muß wegen seiner astronomischen Tafeln mit geometrischen Lösungen sphärischer Aufgaben genannt werden (s. o. S. 48). Der dritte, Ibn Alhaiṯam, aus Baṣra eingewandert (lat. Alhazen; † 1039), war ein umfassender Gelehrter. An Mathematischem schrieb er eine Abhandlung über die Quadratur des Kreises, worin er den Satz über die Möndchen auf den zwei Katheten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks bewies. Das Beste ist aber eine Schrift über die Kubatur des Paraboloids.

In dieser werden im Anschluß an die Arbeiten von Ṯābit ibn Qurrah (s. o. S. 45) und Alkūhī (s. o. S. 49) über diese und über Archimedes hinaus, dessen Werk über Sphäroide und Konoide (s. o. S. 22) die Araber nicht kannten, die Rotationsköper berechnet, die durch Drehung um einen beliebigen Durchmesser einer Parabel entstehen (schon bei Alkūhī), sowie vor allem solche, die durch Rotation eines Parabelabschnittes um die Ordinate gebildet werden. Als Hilfssätze gibt Ibn Alhaiṯam mit einwandfreien Beweisen die Summen der Potenzen der ganzen Zahlen bis zur vierten einschließlich, welch letztere hier zum erstenmal auftritt (s. o. S. 50), sowie Grenzen für $\sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2$. Die Schlußformeln entsprechen ganz den heutigen. Er bildete mit ihnen, modern gesprochen, die Integrale $\int_0^a x^3\,dx$ und $\int_0^a x^4\,dx$. Als Astronom entwickelte er eine Konstruktion der Qiblah (Richtung nach Mekka), die wir ohne weiteres in den sphärischen Kotangentensatz übertragen können.

Im spanischen Omajjadenreich treffen wir im 11. Jahrhundert zuerst auf den Astronomen Ǵābir ibn Aflaḥ von Sevilla, der eine Astronomie in 9 Büchern herausgab. Das erste Buch enthält eine selbständige Trigonometrie, die, wenn auch unvollkommener als die Naṣīr eddīns (s. o. S. 51), doch einiges Neue brachte, u. a. einen fünften Satz über das rechtwinklige sphärische Dreieck (vgl. S. 36). Aus Ǵabīr machte man im Mittelalter Geber und leitete das Wort Algebra von ihm her. Ein zweiter Westaraber mit dem Beinamen Alḥaṣṣār lebte wahrscheinlich noch vor 1200. Er hinterließ ein etwas kunterbuntes Buch über das Rechnen mit ganzen Zahlen, Brüchen und Wurzeln, mit eingestreuten Aufgaben über Gleichungen und Reihen.

Hier finden wir den Bruchstrich zum erstenmal. Das Rechnen ist das indische. Die benutzten Ziffern sind die der Westaraber, Ġubār- (Staub-) Ziffern[1]) genannt, die von denen der Ostaraber ziemlich abweichen, andererseits Ziffern ähneln, wie sie in Schriften über den Abakus (s. o. S. 32), vom 11. Jahrhundert an, im lateinischen Mittelalter auftauchen (vgl. S. 58).

Eine merkbare Beeinflußung durch Europa findet sich bei Ibn Albannāʾ, der um 1255 in Marokko geboren, in der afrikanischen Seestadt Bugia lebte. In seinem arithmetisch-algebraischen Werk, das im ersten Teil sich stark an Alḥaṣṣār anlehnt, mischt sich ins Zifferrechnen deutlich das Rechnen mit Kolumnen, wie es auf dem den frühen Indern und Arabern nicht bekannten Abakus (s. o. S. 32) vor sich ging.

Ibn Albannāʾs Werk war knapp und gelehrt. Es fehlten die Zahlenbeispiele zu den Regeln. Ein Kommentar dazu war also dringend nötig. Ein solcher ist von dem in Granada ansässigen Alqalaṣādī, der 1486 in der Provinz Tunis starb, wohin er vor den andrängenden Christen geflohen war, überliefert, aber nicht veröffentlicht. Man kann den Inhalt ungefähr entnehmen aus der von seinen zahlreichen Werken allein bis jetzt übersetzten „Enthüllung der Geheimnisse von der Wissenschaft des Ġubār", wo er ebenfalls Rechnen und Algebra lehrte. Wie bei Bhāskara und im Bakhshālībruchstück findet sich auch hier die fortgeschrittenste Symbolik, die bei den Arabern überhaupt nur im Westen sich in bescheidenem Maße entwickelt hatte: Gleichheits- und Wurzelzeichen, Abkürzungen für die Potenzen der Unbekannten, Symbole für Addition und Subtraktion. In der Bruchlehre gebrauchte er aufsteigende Kettenbrüche.

[1]) Inder und Araber und wohl auch schon die Griechen rechneten ziffernmäßig auf mit Staub oder Sand bedeckten Tafeln.

Der Tod Timurs (1405) schuf im Osten den Türken freie Bahn; sie gaben 1453 mit der Eroberung Konstantinopels auch dem byzantinischen Reich den Todesstoß. Im Westen fiel 1492 das letzte maurische Königreich Granada nach 11 jährigem Kriege. Im selben Jahre landete Kolumbus in der Neuen Welt. Das ist der Beginn der Neuzeit, in der die Muslime keine wissenschaftliche Rolle mehr spielten.

Zur Aussprache: ǵ = dsch, ḥ = ch, ḫ = ch (Kehllaut), q = k (Kehllaut), ṣ = ß, š = sch, ṯ = th (engl., hart), z = s (stimmhaft), alles übrige ungefähr wie im Deutschen.

## 3. Das lateinische Mittelalter.

### A. Die römische Überlieferung.

Mit dem griechischen Kaiserreich zu Byzanz (vgl. o. S. 38), das seit 330 Konstantinopel hieß, war das östliche Kalifat in steter, oft auch freundschaftlicher Berührung. Nach Beendigung der Christenverfolgungen (etwas nach 300) folgten allerdings auch dort Jahrhunderte wüster Sektenkämpfe (s. o. S. 45), die in dem sog. Bilderstreit (8. Jahrhundert) die antike Kultur ganz zu vernichten drohten. Aber im 9. Jahrhundert wurde die Konstantinopeler Hochschule durch einen auch von Alma'mūn (s. o. S. 48) zu Rate gezogenen, mathematisch gerichteten Philosophen, namens Leon, neu aufgerichtet. Wenn auch die eigentliche Mathematik wohl wenig gepflegt wurde, trieb man doch immer Astronomie, schon wegen der Osterberechnung (lat. Computus), mehr noch aber wegen der Verbindung mit der Astrologie, die, von Babylon stammend (s. o. S. 6), seit Alexanders Tod (s. S. 16) sich auch Griechenland und dann den ganzen Osten erobert hatte. Bestimmt im 11. Jahrhundert, wenn nicht früher, trat auch im oströmischen Reich das indische Rechnen auf (s. o. S. 43). Erhalten ist eine Darstellung

aus dem 13. Jahrhundert, die von Maximus Planudes herrührt. Wir haben von Byzantinern sonst nur noch, wegen einer Schrift über magische Quadrate (s. o. S. 49), einen Manuel Moschopulos aus dem Anfang des 14. Jahrhunderts zu erwähnen. Nur mittelbar, aber doch entscheidend, trat das Griechentum nach der Katastrophe von 1453 (s. o. S. 55) wieder auf den Plan, als mit den Flüchtlingen treu bewahrte Urhandschriften im Abendland, besonders in Italien auftauchten und dort eine Wiedererweckung griechischer Wissenschaft hervorriefen (s. u. S. 74).

Unterdessen hatte sich, bald nach dem Erlöschen der großen Wanderungen, die die Germanenstämme nach dem Westen und Süden Europas geführt hatten, wo sie die römische Herrschaft zerbrachen (s. o. S. 32), das Christentum den Weg nach Norden gebahnt. Im Kampfe mit dem heidnischen Römertum erstarkt, übernahm es nicht nur äußerlich die Form des römischen Imperiums, sondern durchsetzte sich auch innerlich mit römischem Geiste, indem die lateinische Sprache zur Kirchensprache erhoben wurde. Da zudem in jenen Zeiten — im Süden bis ins 13. Jahrhundert, im Norden noch länger — die Bildung nicht nur des Volkes, sondern überhaupt aller „Laien" äußerst gering war, befand sich die ganze Wissenschaft in den Händen des Klerus, und das Latein wurde zur Gelehrtensprache. Diese Wissenschaft und Gelehrsamkeit war anfangs freilich äußerst dürftig. Weder die römische Grundlage (s. o. S. 32), noch die ersten christlichen Bedürfnisse, die rein theologisch waren, ließen etwas anderes erwarten. An Weltlichem besaßen die Klosterbibliotheken höchstens einige römische Klassiker, ein Arznei- und ein Astrologiebüchlein. Das Osterdatum mußte nach einer Vorschrift des hl. Augustinus in jedem Kloster ein Mönch oder eine Nonne feststellen können. Dazu gehörte sehr wenig.

Trotzdem dürfen wir auch diese dunklen Zeiten nicht übergehen, wenn wir verstehen wollen, wie später aus dem Zusammenfluß römischer und griechischer Überlieferung, unter Vermittelung der Araber, die moderne wissenschaftliche Kultur entstand.

Die ersten Spuren von Mathematik in diesem Zeitalter finden sich in den sog. Etymologien (*Origines*) des hl. Isidorus, Bischofs von Sevilla († 636), eines in Afrika geborenen Goten. Es handelt sich aber fast nur um manchmal ganz verunglückte Worterklärungen. Erst ein Jahrhundert später treffen wir solche Spuren wieder bei dem berühmten Beda († 735), der an der Grenze zwischen England und Schottland geboren war. Er schrieb über Zeit-, besonders Osterrechnung und überlieferte ein System der Zahlendarstellung durch Finger, Hände und Arme, das lange hinaus fortwirkte und schon vorher auch im Orient bekannt war, dessen Ursprung aber noch dunkel ist. Im Todesjahre Bedas wurde Alkuin geboren, Angelsachse wie jener, ebenfalls ein bedeutender Gelehrter für seine Zeit und vor allem hervorragend durch seine Lehrtätigkeit, die er zuerst an seiner eigenen Schule in York, dann an der Hofschule Karls des Großen und schließlich in der Abtei von Tours ausübte, die ihm Karl der Große verliehen hatte. Gestützt auf Boëtius (s. S. 32) und einige geringere römische Schriftsteller, wurde dort überall neben dem Trivium Grammatik, Rethorik, Dialektik auch das römische Quadrivium (s. o. S. 33) gelehrt, so daß die Mathematik wenigstens eine bescheidene Stelle fand. Es gibt eine Sammlung von Scherz- und Rätselaufgaben *Propositiones ad acuendos iuvenes* (d. h. Aufgaben zur Schärfung der Jünglinge), die möglicherweise auf Alkuin zurückgeht. Es handelt sich mathematisch um Zahlenspielereien, ein bißchen Feldmessung und Aufgaben, die durch lineare Gleichungen gelöst werden können. Auch eine „Dio-

phantische Aufgabe" ist darunter. Die Aufgaben sind wohl sehr alt, finden sich aber teilweise hier zum erstenmal aufgeschrieben. Aus Alkuins Schule gingen zahlreiche Männer hervor, die teils selbst, teils durch ihre Schüler Alkuins Wissen und Lehrmethode in den seit dem Vertrag von Verdun (843) getrennten Ländern Frankreich (Paris, Cluny) und Deutschland (Fulda) verbreiteten.

Wie man in jenen Jahrhunderten eigentlich rechnete, ist nirgends überliefert worden. Man darf aber wohl annehmen, daß der Gebrauch des römischen Abakus (s. o. S. 32) nie ganz aufhörte. Mit Sicherheit weiß man das seit dem 10. Jahrhundert, gegen dessen Ende Gerbert ein Büchlein über das Dividieren schrieb, worin er das Abakusrechnen, das er in seiner Jugend gelernt habe, beschreibt. Man weiß auch, daß Gerbert, der, arm in der Auvergne geboren, die höchste kirchliche Würde als Papst Silvester II. († 1003) erstieg, das Rechnen mit dem Abakus um 980 als Stiftslehrer zu Rheims dem Geometrieunterricht einverleibt hatte. Eine Geometrie, die ihm einzelne Handschriften zuschreiben, kann, wenn sie auch vielleicht nicht von ihm selbst stammt, ganz gut den damaligen Wissensstand bezeichnen. Es ist nichts darinnen, was über die Kenntnisse der römischen Feldmesser hinausginge. Zu seiner Zeit galt Gerbert, der auch Studien in Vich bei Barcelona machte, aber mit muslimischer Weisheit wenigstens nicht direkt in Berührung kam, mit Recht für einen Gelehrten, der das ganze römische Wissen in sich vereinigte.

Auf dem Abakus wurden wohl meist die römischen Ziffern benutzt, sowohl am Kopf der Spalten, wie zum Teil auch auf den Rechensteinen (Apices). Gerbert gibt darüber nichts an. Die sonderbaren 9 Apiceszeiffern (ohne die Null), die wir schon S. 54 erwähnten, treten mit Sicherheit erst vom 11. Jahrhundert an auf, in einer Handschrift von Ivrea, in der gefälschten Geometrie des Boëtius (s. o. S. 33)

und einer ausführlicheren Schrift über den Abakus von Bernelinus (Paris; um 1020). Bernelinus lehrt auch das Rechnen mit Brüchen nach dem römischen Duodezimalsystem (s. o. S. 32). Ein Zahlenspiel, die sog. Ritmomachia, das schon Gerbert kannte und das bis zum 16. Jahrhundert sehr verbreitet war, zeigt, daß man in den in Betracht kommenden Kreisen doch auch mit Bruchrechnen ziemlich Bescheid wußte.

Von jetzt ab werden die Schriften über den Abakus häufiger. Wir weisen nur noch auf eine Bearbeitung durch Radulph von Laon († 1131) hin, weil dort zum erstenmal jene eigentümlichen Namen igin, andras, ormis usw. für die Apizesziffern eins, zwei, drei usw. auftreten, die Radulph wie den Abakus selbst als chaldäisch bezeichnet. Für den Abakus selbst ist das sicher falsch; für die Namen, die den Gelehrten viel Kopfzerbrechen machten, ist es richtig, wenn man chaldäisch, was sonst gleich babylonisch ist, als eine damals öfter übliche Bezeichnung für arabisch nimmt. In der Tat sind diese Namen in einer anderen Handschrift, die kaum viel später ist, wirklich als arabisch bezeichnet, und sie lassen sich auch als, allerdings zum Teil fürchterliche, Verstümmelungen der arabischen Zahlwörter erkennen.

### B. Der arabisch-griechische Einschlag.

Wir sehen hier schon, wie die Wissenschaft der Muslime ins christliche Mittelalter hereinspielt. Wiewohl von Kirche und europäischem Staatswesen befeindet, konnte der Islam doch nicht verhindert werden, an den Berührungsflächen den christlichen Kulturkreis zu beeinflussen. Das geschah von Spanien und Sizilien aus auf ganz natürliche Weise, und als die Kreuzzüge um das Jahr 1100 begannen, trug auch der Osten einen beträchtlicheren Teil bei. Arabische und jüdische Ärzte und Astrologen wurden

von europäischen Herrschern herangezogen, und besonders für die Verbreitung des einfachen Rechnens muß dem damals immer stärker einsetzenden Handel ein größerer Anteil zugebilligt werden, als sich literarisch erweisen läßt.

Schon im 10. Jahrhundert gab es Übersetzungen aus dem Arabischen ins Lateinische, doch sind solche erst vom 12. Jahrhundert an erhalten. Die allerersten betrafen wohl astronomische oder astrologische Werke. Gleich zu Anfang des 12. Jahrhunderts aber wurde das Rechenbuch des Alḫwārazmī (s. o. S. 47) übersetzt, vielleicht durch den Angelsachsen Atelhard von Bath, der in Ägypten und Kleinasien reiste und sicher Alḫwārazmīs astronomische Tafeln und Euklids Elemente aus dem Arabischen ins Lateinische übertrug. Wenig später übersetzte in Spanien Plato von Tivoli die Sphärik des Theodosios (s. o. S. 29) und (1145) ein inhaltsreiches, von einem spanischen Juden Abraham bar Chijja (mit dem Titel Savasorda, d. h. Polizeimeister) nach arabischen Quellen etwa 1136 hebräisch geschriebenes Werk über Flächen- und Körpermessung, das Plato *Liber embadorum* nannte. Andere Juden, wie ein Johannes von Sevilla, traten selbst als Übersetzer auf. Für uns ist besonders wichtig ein *Liber alghoarismi*, das vielleicht der letztere unter starker Anlehnung an das Rechenbuch des Alḫwārazmī verfaßte. Sonst sind aus dem 12. Jahrhundert nur noch einige wenige ganz kleine „Algorismen“ bekannt. Mit Johannes von Sevilla beginnt aber auch schon die Übersetzung arabischer Bearbeitungen der Aristotelischen Philosophie, zuerst nach Avicenna (s. o. S. 49) und anderen, später aber nach dem berühmten Kommentator Ibn Rušd (lat. Averroës; † 1198), der die ganze Scholastik beherrschte (s. u. S. 65). Für die Verbreitung der Mathematik ist auch diese Beschäftigung mit Aristoteles nicht unwichtig, einerseits wegen der von Aristoteles

selbst eingestreuten Zitate, besonders aus Euklid, andererseits wegen der direkten Anregung zu mathematischen Beispielen durch seine Lehre von der „Bewegung" (s. u. S. 66).

Einer der fruchtbarsten Übersetzer aus der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts war Gerhard von Cremona, der in Toledo neben einer neuen Übersetzung der vollständigen Elemente Euklids auch u. a. eine solche von dessen „Data" und die erste des Almagest (s. o. S. 45) lieferte. Die Algebra Alḫwārazmīs wurde von ihm und Robertus Castrensis (d. h. aus Chester), jedoch von beiden unter Weglassung der Erbteilungsaufgaben, wohl ziemlich gleichzeitig übertragen. Als Ausnahme muß betrachtet werden, daß bei den Euklidischen Elementen Gerhard wahrscheinlich eine lateinische Übersetzung direkt nach dem Griechischen mitbenutzte. Sonst kam es sogar vor, daß zwischen Griechisch und Lateinisch nicht nur Arabisch, sondern auch Spanisch vermittelte. Daß dies zu vielen Verstümmelungen führen mußte, ist einleuchtend.

Die indische Rechenkunst fand immer mehr Anhänger. Das zeigt das zahlreichere Auftreten von „Algorismen" im 13. Jahrhundert. Die größte Verbreitung fanden in den folgenden Jahrhunderten der *Tractatus de arte numerandi* des Johannes de Sacrobosco (d. h. aus Holywood, wahrsch. Halifax), ein knappes Regelbuch, fast ohne Beispiele, und in zweiter Linie ein *Carmen de algorismo* des Minoriten Alexander de Villa Dei (d. h. aus Villedieu) vom selben Charakter. Weitere Rechenbücher gibt es u. a. von einem sonst unbekannten Gernardus und von Jordanus Nemorarius, der vielleicht mit dem deutschen Dominikanergeneral Jordanus Saxo († 1237) identisch ist (s. u. S. 62). Der Algorismus des Sacrobosco, dem eine gleichbeliebte *Sphaera* zur Seite trat, wurde gegen Ende des Jahrhunderts von Petrus de Dacia (d. h. aus Dänemark) kommentiert. Ganz schüchtern stehen neben

diesen völlig internationalen Schriften ein französisches, ein englisches und ein isländisches Rechenbuch, deren ersterem sogar eine kleine Geometrie beigefügt war.

Die arabisch-griechische Astronomie wurde besonders gepflegt an den Höfen des Hohenstaufenkaisers Friedrich II. († 1250), der eine neue Übersetzung des Almagest veranlaßte, und des Königs Alfonso X. von Kastilien († 1284), dessen Tafelsammlung auf Jahrhunderte hinaus in Benutzung war. Stark benutzt wurde in der Folge auch eine neue Euklidübersetzung mit Zusätzen des Campanus von Novarra (um 1260), die in der Hauptsache nach einem arabischen Text abgefaßt wurde. Campanus kommentierte auch die Sphärik des Theodosios und die des Menelaos und wahrscheinlich auch die Ausgabe des Ptolemäischen Planisphaeriums (s. o. S. 36) durch Jordanus. Jordanus selbst verfaßte neben einer dem Boëtius (s. o. S. 32) nachgebildeten Arithmetik noch zwei bemerkenswerte Schriften, die wenigstens mittelbar auf arabische Quellen zurückgehen müssen. Es sind das eine sowohl in der Aufgabenwahl, wie in der Buchstabenrechnung[1]) ziemlich fortgeschrittene Algebra mit dem Titel *De numeris datis* und eine recht eigenartige Geometrie *De triangulis.* Noch größer ist die Bedeutung seines Werkes *De ponderibus* in der Geschichte der Mechanik.

Für die Mathematik nicht ohne Bedeutung sind auch die Schriften, die um diese Zeit in direktem Anschluß an Ibn Alhaiṯam (s. o. S. 52) über Optik erschienen und „Perspektive" betitelt wurden. Sie enthielten meist auch eine geometrische Einleitung. Wir nennen zunächst die von dem Franziskaner Johannes Peckham († 1292 als Bischof von Canterbury) und das große Werk des Prämonstratensers Witelo (lat. Vitellio), der, in Polen als Sohn

[1]) Da Jordanus keine Operationszeichen hat, muß er immer neue Buchstaben einführen, wodurch seine Darstellung sehr unübersichtlich wird.

eines Deutschen und einer Polin geboren, in einem Kloster unweit Valenciennes lebte. Er widmete sein Werk Wilhelm von Moerbeke, einem flämischen Dominikaner, dessen freilich oft fehlerhafte, direkte Übersetzungen von Herons Katoptrik, Archimedes' Werk von den schwimmenden Körpern und dem Analemma des Ptolemaios (s. o. S. 36) zeigen, daß nun auch das Griechische den Gelehrten nicht mehr ganz unbekannt war. Die für uns einschlägigen Werke waren aber in Europa im allgemeinen nicht vorhanden. Archimedes' und Apollonios' mathematische Leistungen blieben dem Mittelalter im ganzen fremd.

Fern von den Kreisen der bisher Genannten und auch ohne Einfluß auf sie, von desto größerer Bedeutung aber in seinem Vaterlande und für spätere Verfasser war das Hauptwerk des Pisaners Leonardo, der umfangreiche *Liber abaci*, der zuerst 1202 verfaßt, 1228 in der auf uns gekommenen Form neu herausgegeben wurde. Scheinbar entgegen dem Titel, der nur „Rechenbuch" bedeuten will, behandelt der Verfasser nicht das Abakusrechnen, sondern beginnt sofort mit den arabisch-indischen Zahlzeichen, um in 15 Kapiteln alles, was über das Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen, mit Quadrat- und Kubikwurzeln, mit Dreisatz und Gleichungen, linearen wie quadratischen, bestimmten und unbestimmten, mit einer und mehreren Unbekannten damals auf grund arabischer Quellen (bes. Abū Kāmil), die er offenbar an Ort und Stelle selbst studiert hatte, zu sagen war. Zahlreiche angewandte Beispiele, die zum Teil bis ins fernste Altertum weisen und in späteren Sammlungen bis heute immer wiederkehren, beleben das Ganze. Leonardos große Gewandtheit im algebraischen Rechnen ist besonders hervorzuheben.

Leonardo Pisano, der wie Sacrobosco weltlichen Standes war, hat im ganzen 7 Werke verfaßt, von

denen nur 5 erhalten sind. Wir heben noch seine *Practica geometriae* von 1220 hervor, ebenfalls ein umfangreiches, nicht unselbständiges Werk bunten Inhaltes, das u. a. auch Anwendungen der Trigonometrie auf die Feldmeßkunst gab und auf dem *Liber embadorum* Savasordas (s. o. S. 60), dem Werk der Banū Mūsā (s. o. S. 48) und anderen ähnlichen Quellen beruht. Noch mehr Eigenes gab Leonardo wohl in dem etwa 1225 entstandenen *Liber quadratorum*, einer unvollendeten zahlentheoretischen Schrift, während die äußerst genaue Lösung einer kubischen Gleichung, die er u. a. in der „Auslese (*Flos*) verschiedener Fragen aus der Zahlen- und Raumlehre", ohne das Verfahren selbst mitteilt, wieder deutlich auf arabische Quellen weist (s. o. S. 50). Einige der von Leonardo in den beiden letzten Schriften behandelten Aufgaben wurden in einer Disputation dem Kaiser Friedrich II. (s. o. S. 62) vorgeführt.

Als selbständiger Kopf ragt etwa 100 Jahre später der französische Jude Levi ben Gerson hervor. Von ihm sind eine (lat.) trigonometrische Schrift über den Jakobsstab (ein Instrument zum Höhenmessen) und eine (hebr.) Arithmetik „Praxis des Rechners" (geschr. 1321) bekannt, die bemerkenswerte Kombinationsformeln enthält. Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Normannen Jean de Meurs (lat Joh. de Muris), der wenig später Professor an der Pariser Universität (s. u. S. 65) war und zahlreiche Werke über Musik, Mathematik und Astronomie schrieb. Seine Bearbeitung der Arithmetik des Boëtius wurde noch im 16. Jahrhundert viel benutzt. Das Beste leistete er aber wohl in dem noch immer nicht ganz veröffentlichten *Quadripartitum numerorum*, worin er in Versform mit Prosakommentar Rechnen und Algebra mit Einschluß der quadratischen Gleichungen, in Anlehnung an Alḫwārazmī und Leonardo von Pisa, nicht unselbständig vorträgt.

## C. Die Scholastik.

Aus den von uns erwähnten Stifts- und Klosterschulen gingen durch Zusammenfassung verschiedener einzelner und durch Erweiterung des Lehrzieles die Universitäten hervor, deren älteste (Paris, Oxford und Bologna) am Anfang des 13. Jahrhunderts bereits als vorhanden betrachtet werden können. Spätere Gründungen erfolgten meist direkt durch päpstliche Bullen. Es wird danach nicht wundernehmen, daß die Richtung all dieser im übrigen ganz internationalen Hochschulen eine kirchliche war. Die Humanisten des 14. und 15. Jahrhunderts nannten die im Dienste der Kirche stehende Philosophie jener Zeiten etwas spöttisch Scholastik. Der Beginn dieser Geistesrichtung muß schon in die Zeiten Gerberts (s. o. S. 58) gelegt werden. Mit dem 13. Jahrhundert befinden wir uns auf ihrem Höhepunkt und sie erlischt, wenigstens mit selbständigen Arbeiten, in der Mitte des 15. Jahrhunderts.

Die Scholastik hat innerhalb ihrer Begrenztheit eine eigenartige und umfangreiche Geisteskultur geschaffen, die alle Fakultäten beeinflußte. Für die Mathematik fiel freilich nur das ab, was in der „Artistenfakultät", in der man für alle Studierenden die „sieben freien Künste" lehrte (d. i. das Trivium und Quadrivium; s. o. S. 57), über den „Algorismus", die „Sphaera" und Euklid (oft nur einige Sätze) „gelesen" wurde. Die großen Führer allerdings studierten mehr und bedauerten, wie Roger Bacon († 1294) das Fehlen einer weiter verbreiteten mathematischen Bildung. Nur einzelne traten mit eigenen Leistungen aus dem gewöhnlichen Rahmen heraus.

Allen Philosophen jener Periode gemeinsam waren Diskussionen über das Unendlichgroße und Unendlich-

kleine, und in den Schriften der großen Scholastiker Thomas von Aquino († 1274), Albertus Magnus († 1280) und anderer liegen die philosophischen Keime jener Lehre von den „Indivisibeln", mit denen später Cavalieri (s. u. S. 104) die moderne Mathematik einleitete. Die Paradoxa des Zenon (s. o. S. 11) tauchten wieder auf, man unterschied mit Aristoteles das potenziell und das aktual Unendliche und einige waren geneigt, auch die Möglichkeit des zweiten zuzugeben, während jener beide verworfen hatte. Sogar zwischen Grenzen, die man erreichen kann und solchen, denen man nur beliebig nahe kommt, lernte man unterscheiden. Über die stetige Raumerfüllung schrieb u. a. Thomas Bradwardinus (gest. 1349 als Bischof von Canterbury) einen eigenen Traktat. Demselben verdankt man auch eine *Geometria speculativa*, wo wie bei Campanus (s. o. S. 62) Sternvielecke vorkommen. Er und einige andere Engländer des angehenden 14. Jahrhunderts hatten auch von der arabischen Trigonometrie Kenntnis genommen.

Im 14. Jahrhundert trat ein neues Disputationsthema, wahrscheinlich auf Grund bisher unbekannter arabischer Quellen, in der Scholastik auf. Es war das Wachsen und Abnehmen der Aristotelischen Formen, wie Wärme, Kälte usw., aber auch Geschwindigkeit. Man betrachtete diese Formen, wenn wir es modern ausdrücken, als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen, z. B. der Zeit. Der uns so naheliegende Gedanke der graphischen Veranschaulichung tauchte in der Tat auf und zwar um 1370 bei dem auch sonst bedeutenden Nikolaus Oresme († 1382 als Bischof von Lisieux). Die Figuren waren freilich naiv aus Kreisbogen und geraden Linien zusammengesetzt. Immerhin kam man auf diese Weise rein spekulativ zu dem Hauptgesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Über das Thema wurde unter der Be-

zeichnung „Latitudo formarum“ von da bis ins 16. Jahrhundert an allen Universitäten gelesen.

Damit in Verbindung stand eine Erweckung und Weiterentwicklung der antiken Lehre von den Verhältnissen und den mittleren Proportionalen (s. o. S. 12). Euklid hatte z. B., wenn wir es in Zahlen ausdrücken, das Verhältnis 9:1 das „doppelte“ des Verhältnisses 3:1 genannt. In Bradwardins Proportionslehre von 1328 sieht man nun, wie gelegentlich schon bei Archimedes, was wir $\sqrt{3}$ $(= 3^{\frac{1}{2}})$ schreiben, als „die Hälfte des dreifachen Verhältnisses“ bezeichnet. Diesen Gedanken dehnte Oresme im *Algorismus proportionum* (proportio = Verhältnis) auf alle Bruchexponenten aus und gab die Hauptgesetze für das Rechnen mit solchen „Verhältnissen der Verhältnisse“ an.

Die Erörterungen über die Aristotelische „Bewegung“ führten auch etwa um die Mitte des 14. Jahrhunderts, dazu, die unabhängige Veränderliche, also z. B. die Zeit, nach Abschnitten einzuteilen, die in geometrischer Reihe abnahmen. Indem man dann jedem Abschnitt etwa eine gewisse Geschwindigkeit zuordnete, gelangte man zu Reihen, die wir $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ in inf. schreiben, für $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, usw., die wirklich für beliebiges $x$ summiert wurden. Andere, noch verwickeltere, wurden in Grenzen eingeschlossen. Die Summe stellte nach unserer Annahme den „Weg“ des Körpers in der gegebenen Zeit dar.

Schon ganz dem 15. Jahrhundert gehört der in jeder Hinsicht bedeutende Kardinal Nikolaus Cusanus (aus Cues a. d. Mosel; † 1464) an. Ein Jakob von Cremona hatte um 1450 Teile von Archimedes übersetzt. Das gab Nikolaus von Cusa den Anstoß zu den ersten exakten Betrachtungen über die Kreisberechnung im Mittelalter. Seine bedeutendste Leistung ist eine angenäherte Konstruktion zur Geradstreckung eines Kreisbogens, die

noch heute in der darstellenden Geometrie gerne verwendet wird (vgl. u. S. 95).

Gegen den Schluß unseres Abschnittes war Wien (gegründet 1365) die Universität, an der die Mathematik die beste Pflege fand. Wir nennen als deren Vertreter Johann von Gemunden (wahrsch. Gmünd i. Nied.-Öst.; † 1442) und Georg von Peurbach (bei Linz; † 1461), die schon dem Humanismus zuzuzählen sind. Wenn wir sagen, daß letzterer den Almagest aus dem Urtext zu übersetzen begann, haben wir ihn auch schon als Astronomen und Vertreter der Trigonometrie gekennzeichnet.

# III. Neuzeit.

## 1. Fortentwicklung der älteren Mathematik.

### A. Verbreiterung des mathematischen Interesses.

Der Zeitpunkt, mit dem wir, der politischen Geschichtseinteilung folgend, das Mittelalter abgeschlossen haben, ist zwar für die Mathematik nicht von entscheidender Bedeutung, aber es kommen um diese Zeit doch eine Reihe von Einflüssen zur Geltung, die ihr einen wesentlich größeren Wirkungsbereich schufen, als es durch die der Mathematik wenig holden, bis ins 17. Jahrhundert scholastisch gerichteten Universitäten geschah.

Die Erfindung der Buchdruckerkunst trug dazu vornehmlich bei. Freilich befanden sich unter den ersten mathematischen Druckwerken die Etymologien des Isidorus (1472; s. o. S. 57), die Arithmetik des Boëtius (1488; bis 1570 mehr als 25 Ausgaben), Algorismen von Sacrobosco (1488) und anderen, sowie zahlreiche scholastische Traktate. Aber der Druck brachte auch praktisch gerichtete Rechenbücher zu größerer Verbreitung, die dem in Italien

seit dem 13. Jahrhundert blühenden Handelsbetrieb und Bankwesen entsprangen und bald Nachfolger in Deutschland, vor allem in den Handelsmittelpunkten des Südens, fanden. Die erste gedruckte praktische Arithmetik erschien ohne Verfassernamen zu Treviso im Jahre 1478. Ihr folgte eine solche von Pietro Borg(h)i 1488 mit zahlreichen Neuauflagen. Schon 1482 war zu Bamberg ein deutsches Rechenbuch des „Rechenmeisters" Ulrich Wagner aus Nürnberg gedruckt worden. Es sind davon aber nur noch 9 kleine Blattstreifen erhalten. Im Jahre 1483 kam ein zweites ebendort anonym heraus, von dem man zwei Exemplare kennt. Umfangreicher, aber mit etwas gelehrtem Einschlag, war das Rechenbuch des Johannes Widman aus Eger, erschienen zu Leipzig im Jahre 1489, mit 4 weiteren Auflagen. Widman hielt, was für ganz Deutschland eine Ausnahme darstellte, an der Universität zu Leipzig um 1486 auch Vorlesungen über Algebra. In seinem Rechenbuch befinden sich als Niederschlag davon nur zwei Regeln zur Auflösung quadratischer Gleichungen und eine Stelle mit algebraischer Rechnung. Wir erwähnen dann aus Italien noch ein Buch über die Umrechnung der Geldsorten, Maße und Gewichte alle Länder (*Libro tariffe*), das zuerst undatiert und dann in zweiter Auflage 1488 erschien, sowie ein Büchlein *De Arithmetica* von Philippo Calandri (Florenz 1490), das die Zahlendarstellung durch Finger, Hände und Arme (s. o. S. 57) in schönen Holzschnitten erläuterte und ein anderes desselben Verfassers (Florenz 1491) mit hübschen Bildern zu den einzelnen Aufgaben. Diesen Rechenbüchern folgten zahllose andere in den folgenden Jahrhunderten bis heute.

Der Buchdruck brachte in Deutschland auch eine Menge von Darstellungen des alten Abakusrechnens (s. o. S. 58), das hier unter den weniger Gebildeten bis ins 17. Jahrhundert üblich war, unter dem Titel „Algorithmus linealis"

oder „Rechnen auf den Linien". Vereinzelt sind französische Rechenbücher aus der Zeit, wie das *Livre de chiffres et de getz* (2. Aufl., Lyon 1501), das, wie auch viele deutsche, Ziffern- und Linienrechnen (getz = jetons = Rechenpfennige) zu gleicher Zeit lehrte. Gedruckt wurden auch eine Anzahl von „Visierbüchlein", die Anleitungen zur Eichung der Fässer gaben, ferner astronomische und astrologische Werke, zu allererst von Regiomontanus (s. u. S. 74) in seiner eigenen Nürnberger Druckerei wohl schon 1471 die Planetentheorien seines Lehrers Peurbach (s. o. S. 68), sowie zahlreiche Darlegungen des Computus (s. o. S. 55), die oft mit Kalendern vereinigt wurden. Über die Drucke der antiken Klassiker s. u. S. 75.

Viel geometrisches Interesse entwickelte in jener Zeit die Welt der Maler, Baumeister und Kunsthandwerker. Schon der geistreiche Künstler Alberti hatte um 1450 eine praktische Geometrie mit dem Titel *Ludi* (d. h. Spiele) geschrieben und sich im Anschluß an Cusanus (s. o. S. 67) mit der Quadratur des Kreises beschäftigt. Das erste Lehrbuch der Perspektive, das aber nicht gedruckt wurde, verfaßte 1482 in hohem Alter (aber nicht blind) italienisch und lateinisch der Maler Pietro Franceschi. Er leitete das perspektivische Bild meist aus den beiden Rissen des Gegenstandes her. Bemerkenswert ist, schon bei vorangehenden Künstlern der Frührenaissance, die Beherrschung schwieriger krummliniger Raumgebilde, wie von Tonnengewölben und Kreiswulsten. Albrecht Dürer lernte im Jahre 1506 zu Bologna das Verfahren der Perspektive und veröffentlichte es 1525 zu Nürnberg in seiner *Vnderweysung der messung.* Dieses Buch ist ein sehr eigenartiger Leitfaden praktischer Mathematik für Künstler und gibt ein Bild, welch mannigfaltige Dinge (wie angenäherte Vieleckskonstruktionen, Zeichnung von Spiralen u. a.) in den Bauhütten, offenbar meist von Mund zu Mund über-

liefert worden waren. Schriftliche Quellen dieser Art liegen nur vor in der sog. *Geometria Culmensis* (auch deutsch; um 1400), die auf französischen Unterlagen beruht, und in einer wohl um 1484 zu Nürnberg gedruckten *Geometria deutsch*. Dürers praktische Geometrie hatte viele meist nicht ebenbürtige Nachfolger.

Das 16. Jahrhundert brachte zahlreiche „Perspektiven" im heutigen Sinne des Wortes (s. o. S. 62) in Italien und Deutschland. Als Frucht der französischen Gotik kennen wir nur das von einem Geistlichen Jean Pélerin (gen. Viator) 1505 zu Toul lateinisch und französisch herausgegebene Buch *De artificiali perspectiva*, wo das Distanzpunktverfahren zum erstenmal systematisch angewendet wird, das in Italien, kaum verstanden, nur in einer Zeichnung bei Franceschi und auf einigen Blättern bei Leonardo da Vinci († 1519) vorkommt.

Die mannigfachen Gestalten der Bausteine, Kapitäle, Gegenstände der Kleinkunst u. a. erzeugten auch ein großes Interesse für Stereometrie, das sich vor allem an die regulären Körper knüpfte, die man nicht nur richtig konstruieren, sondern auch projizieren und perspektivisch darstellen und sogar zahlenmäßig berechnen lernte. Ein glänzendes Beispiel dafür ist das inhaltsreiche Werk *De corporibus regularibus*, das von Pietro Franceschi als Anhang zu seiner Perspektive gedacht war und 1487 vollendet wurde. Dieses Werk enthält neben der Berechnung der regelmäßigen und einiger anderer Körper auch zahlreiche planimetrische, besonders Teilungsaufgaben rechnerisch sehr genau, bis zu 10ziffrigen Nennern, durchgeführt. Ja es sind darunter Aufgaben, wie die Berechnung eines Klostergewölbes (d. i. des Körpers, den zwei gleiche, einander zentrisch senkrecht durchdringende Kreiszylinder gemeinsam haben), die Archimedes in der bis in die neueste Zeit verschollen gewesenen Methoden-

lehre (s. o. S. 23) geleistet hatte, und wir sehen, daß hier eine Tradition vorlag, die uns sonst ganz unbekannt ist (vgl. u. S. 105). Auch die sog. Archimedischen Körper (s. o. S. 24) waren ja überliefert worden und Dürer hat neben den Netzen der regulären auch die von 8 Archimedischen in seiner *Vnderweysung* (s. S. 70) abgebildet, während alle 13 möglichen, nebst den ersten Sternvielflachen, später bei Kepler (in der *Harmonice mundi*, 1619; s. u. S. 94) vorkommen. Es ist kennzeichnend für diese Zeit der Hochrenaissance, daß noch 1568 ein Nürnberger, aus Wien gebürtiger Goldschmied Wenzel Jamnitzer ein Tafelwerk mit über 160 perspektivischen Zeichnungen von regulären und anderen Körpern herausgab. Auch auf die Maßverhältnisse des menschlichen Körpers wurde die Mathematik von den Künstlern, auf die militärische Befestigungslehre von Technikern, die vielfach mit den Künstlern identisch waren, angewendet.

Ausdrücklich für das Bedürfnis der Praktiker, und zwar sowohl der Handelsleute als der Künstler, schrieb ein Schüler des Franceschi, der Franzikaner Luca Pacioli († um 1510) ein Sammelwerk, das theoretische und kaufmännische Arithmetik, doppelte Buchführung, Algebra, Geometrie und ein bißchen Trigonometrie enthielt, mit dem Titel *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* (Venedig 1494), das erste Werk dieser Art in einer Landessprache, die allerdings noch viel mit Latein gemischt war. Trotz der Unselbständigkeit des Verfassers, der u. a. Leonardo Pisanos (s. o. S. 63) Werke ausgiebig benutzte und die oben aufgeführten italienischen Rechenbücher, vor allem das *Libro tariffe*, zum Teil wörtlich übernahm, hatte dieses Werk großen Einfluß, sogar bis nach England hin, wo Cuthbert Tonstall zu London im Jahre 1522 das erste englische, allein der Arithmetik ge-

widmete, etwas weitschweifige Buch *De arte supputandi libri quattuor* erscheinen ließ.

War schon die *Summa* gespickt mit philosophischen, theologischen, wortkritischen und anderen gelehrten Einschiebseln, so trat die mystisch-spekulative Richtung noch mehr hervor in Paciolis *Divina proportione* (Venedig 1509), wie schon der Titel zeigt. Dieses „göttliche Verhältnis" ist nichts anderes als die zur Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks nötige stetige Teilung, die wir seit dem Anfang des 19. Jahrhunderts ebenso unpassend „goldener Schnitt" nennen. Pacioli lehrt darin die Konstruktion der regelmäßigen Körper, deren Berechnung und Volumenbestimmung er schon in der *Summa* gegeben hatte. Leonardo da Vinci steuerte dazu 59 Tafeln mit zentralperspektivischen Zeichnungen dieser Körper und der von Pacioli aus ihnen abgeleiteten bei. Unter Hinweis auf die Pythagoreer und Platon, der im „Timaios" die 5 regelmäßigen Körper den 4 Elementen und dem Äther zugeordnet hatte, preist auch Pacioli ständig deren Bedeutung für den Weltaufbau, die auch noch Kepler (s. o. S. 72) tief beschäftigte. Der *Divina proportione* hängte Pacioli eine kleine Architektur nach dem berühmten Römer Vitruvius (um 14 v. Chr.) und eine italienische Übersetzung der ursprünglich nicht gedruckten Schrift Franceschis über die regelmäßigen Körper an, ohne den Verfasser auch nur zu erwähnen.

Ein Werk ähnlichen Inhalts wie Paciolis *Summa* schrieb in dem französischen Handelszentrum Lyon im Jahre 1484 der Arzt Nicolas Chuquet unter dem Titel *Triparty en la science des nombres*, das wohl von Estienne de la Roche in seiner *Larismetique* (Lyon 1520, 1538) weidlich ausgenutzt, aber selbst damals nicht gedruckt wurde, so daß es ziemlich einflußlos blieb. Das ist zu bedauern, da Chuquet viel selbständiger war als Pacioli und beson-

ders in der Symbolik weit über das das damals schon in Italien Übliche und von Pacioli Übernommene hinausging.

Von ungleich größerer Bedeutung war aber der schon erwähnte Regiomontanus (Johannes Müller aus Königsberg in Oberfranken), der leider schon 1476 mit 40 Jahren starb, ohne auch nur den Hauptteil seiner Pläne zur Ausführung gebracht zu haben. Ihn müssen wir wieder den eigentlichen Gelehrten zurechnen. Der Humanismus hatte ja in Italien zunächst nur der Wiederweckung der griechischen und lateinischen Dichter gegolten. Man war aber dadurch doch auch auf die schon vorhandenen und um die Mitte des 15. Jahrhunderts durch griechische Flüchtlinge (s. o. S. 56) vermehrten Handschriften mathematischen und astronomischen Inhalts aufmerksam geworden. Regiomontanus, der wie Roger Bacon (s. o. S. 65) und Cusanus (s. o. S. 67) zur Kalenderverbesserung berufen war, hatte an Ort und Stelle sich in die Kenntnis und den Besitz aller wichtigen einschlägigen Werke gesetzt, und auf der von ihm schon in Druck herausgegebenen Liste der geplanten Neuausgaben lateinischer und Übersetzungen griechischer Mathematiker und Astronomen (ins Lateinische) ist das meiste von dem, was wir im Altertum und Mittelalter als wichtig hervorgehoben haben, enthalten. Fast nichts davon erschien. Als Frucht von Regiomontans Studien des Almagest (s. o. S. 35) und arabischer Astronomen, besonders des Ǵābir ibn Aflaḥ (s. o. S. 53) und auch Albattānī (Naṣīr eddīn kannte er nicht), arbeitete er aber unter Benutzung der Schrift des Levi ben Gerson (s. o. S. 64) die erste selbständige, auch die Ebene berücksichtigende Trigonometrie aus (um 1461), die unter dem Titel *De triangulis omnimodis libri quinque* erst 1533 zu Nürnberg herauskam. Dieses Werk wurde, wenn es als wesentlich Neues vielleicht nur die Heraus-

schälung des sphärischen Kosinussatzes enthielt, doch infolge seiner ausgezeichneten Systematik die Grundlage der europäischenTrigonometrie. Früher zwar, aber doch auch erst 1514 erschien in Wien ein damit in Zusammenhang stehendes großes Tabellenwerk. Für die allmähliche Einführung von Dezimalbrüchen wichtig ist seine *Tabula directionum*, die schon 1490 in Augsburg gedruckt wurde. In seinem Briefwechsel, besonders mit dem gelehrten Astronomen Bianchini, verrät Regiomontan bedeutende Fertigkeiten in Geometrie und Algebra, wo er sich auch eine über das schon Eingeführte hinausgehende Zeichensprache zurechtmachte.

Regiomontans Herausgeberpläne kamen erst allmählich durch andere zur Ausführung, und wenn wir die Übersetzungen in die Landessprachen dazunehmen, dauerte es bis tief ins 18. Jahrhundert, bis das Wichtigste erledigt war. Die erste Druckausgabe erlebten Euklids Elemente, die der Augsburger Drucker Ratdolt in seiner venezianischen Filiale im Jahre 1482 im großen und ganzen nach der Bearbeitung des Campanus (s. o. S. 62) herausgab. Direkt nach dem Griechischen verfaßte eine neue lateinische Übersetzung des ganzen Euklid Bartolomeo Zamberti (Venedig 1500/05), der sich oft und scharf gegen Campanus wandte. Ratdolt ließ dann die Campanussche Ausgabe 1509 durch Pacioli mit wesentlichen Verbesserungen neu auflegen. Weiter sei vorläufig nur noch angeführt, daß Euklid seine erste griechische Ausgabe (mit dem Kommentar von Proklos) im Jahre 1533 (zu Basel) erfuhr, während der Almagest 1538 und Archimedes 1544 zuerst griechisch durch die Presse gingen. Letztere Ausgabe war von der lateinischen Übertragung durch Jakob von Cremona (s. o. S. 67) begleitet, während die Übersetzung Wilhelm von Moerbekes in Teilen schon 1503 zu Venedig und dann etwas weniger

unvollständig von Niccolo Tartaglia (s. u. S. 81), ebenda 1543 als eigenes Erzeugnis herausgegeben worden war. In einer lebenden Sprache erschien zuerst Euklid italienisch 1543 (deutsch 1558 u. 1562, englisch 1570).

### B. Der Aufschwung der Algebra.

Die Algebra machte im 16. Jahrhundert nach zwei Richtungen hin wesentliche Fortschritte. Einerseits näherte sie sich in der Form immer mehr der heutigen Buchstabenrechnung, andererseits erweiterte sie ihr Anwendungsgebiet auf Gleichungen 3. und 4. Grades. Schon Diophant (s. o. S. 37) und die Inder (s. o. S. 43) hatten ja gewisse Abkürzungen und Zeichen für häufig vorkommende Zahlenverbindungen eingeführt. Die Araber aber schrieben wieder alles, meist sogar auch die Zahlen selbst, in Worten aus. In den lateinischen Übersetzungen (s. o. S. 61) wurden für die Unbekannte und ihre Potenzen bestimmte Wörter eingeführt („dragma" oder „numerus" für die Konstante, „radix" oder „res", auch „causa" für $x$, „census" für $x^2$, usw.). Diese Reihe ist schon bei Pacioli unbegrenzt fortsetzbar, und die einzelnen Namen wurden weitgehend abgekürzt. Das italienische Verfahren spiegelt sich wieder in deutschen, zum Teil auch deutsch geschriebenen Handschriften, von denen die älteste (1455—1464 entstandene) dem Kloster St. Emmeram zu Regensburg entstammt. Dort kommt auch zum erstenmal in Deutschland (nach Leonardo von Pisa, 1228) zur Auflösung gewisser unbestimmter Gleichungen die Regel vor, die heute den chinesischen Namen „t'ai-yen" (d. i. große Erweiterung) trägt, weil sie, unbekannter Herkunft, in einigen mittelalterlichen chinesischen Werken angetroffen wird. Ein anderer, jetzt in Dresden befindlicher algebraischer Kodex, aus dem Jahre 1480 etwa, befand sich im Besitze Widmans. Dieser entnahm aus ihm wohl die Zeichen + und

—, und seine eigenen Randbemerkungen sehen moderner Algebra schon ähnlich. Die Abkürzungen für die Unbekannten und ihre Potenzen waren schon hier zu einfachen Zeichen geworden, die meist mit dem Anfangsbuchstaben des betreffenden Wortes in Übereinstimmung gebracht werden können. Diese Symbole nannte man in Deutschland „cossische“ Zeichen (aus „causa“, ital. „cosa“ = Ding) und das Rechnen mit ihnen, wie die Algebra überhaupt, die „Coß“. Die Zeichen bedeuteten allmählich auch nicht mehr ausschließlich die Potenzen der Unbekannten, sondern irgendeiner allgemeinen Zahl. Diese waren ja schon seit Euklid, bei dem sie freilich noch immer durch Strecken versinnbildet waren, durch das ganze Mittelalter mit Buchstaben bezeichnet worden.

Nachdem der Erfurter Heinrich Schreyber (gen. Grammateus) im Jahre 1518 seinem Rechenbuche einen kurzen Abschnitt über die Coß (sowie einen solchen über Buchführung) beigefügt hatte, schrieb 1524 der berühmte fränkische Rechenmeister Adam Riese ein ganzes deutsches Lehrbuch der Coß, das aber ungedruckt blieb. Nicht gedruckt wurde auch eine vielleicht etwas früher verfaßte Algebra, deren lateinischer Grundtext einem fabelhaften Initius Algebras zugeschrieben wurde, während der Verfasser der deutschen Erläuterungen wahrscheinlich der Regensburger Andreas Alexander war. Auch dieser verwendet die cossischen Zeichen; er gibt auch das Rechnen mit Wurzeln und eine eigenartige Tabelle der Binomialkoeffizienten. Zur Andeutung der Quadratwurzel war schon in der Dresdener Handschrift ein der Zahl vorgesetzter Punkt benutzt worden, den bereits Riese und Alexander mit einem Endstrich versahen. So entstand unser Wurzelzeichen, das zum erstenmal gedruckt in der auf einer Wiener Handschrift (a. d. Jahre 1500 etwa) beruhenden „Coß“ Christoph Rudolffs aus Jauer in Schlesien (1525)

auftrat, die verbessert und vermehrt von dem zu Eßlingen geborenen lutherischen Prediger Michael Stifel 1553 neu herausgegeben wurde. Die höheren Wurzeln wurden zunächst meist durch Nebensetzen der cossischen Zeichen ausgedrückt. Unser dreieckiges Schema der Binomialkoeffizienten tritt übrigens, soweit man weiß, zum erstenmal in einer chinesischen Schrift vom Jahre 1303 auf. In Europa war es sicher gleichfalls bekannt; aber wir finden es erst gedruckt auf dem Titelblatt eines Rechenbuchs des Sachsen Petrus Apianus (dtsch. Bienewitz; 1527). Dieser las über Rechnen in deutscher Sprache an der Universität Ingolstadt, wo um diese Zeit (1524) auch Algebra nach Alḫwārazmī (lateinisch) vorgetragen wurde.

Der Vorteil, den die nun eingeführten algebraischen Rechensymbole boten, zeigte sich besonders in dem bedeutendsten Werk der deutschen Coß, der *Arithmetica integra* Stifels, die zu Nürnberg im Jahre 1544 erschien. Stifel war noch als Augustinermönch zu Eßlingen durch Spekulationen über gewisse Zahlen der Apokalypse zur Mathematik gekommen. Er nannte sein Buch auf den Rat eines Freundes „Vollständige Arithmetik", weil es alles umfassen sollte, was in diesen Bereich schlug, wie Zahlenlehre, Rechnen, Proportionen, irrationale Größen, Reihen und eigentliche Algebra. Seine Quellen waren Rieses und Rudolffs Algebrabücher und für die Irrationalitäten des X. Buches von Euklid die Bearbeitung des Campanus. In der Lehre von den Gleichungen machte sich Stifel von dem Formalismus los, der sich eingebürgert hatte, indem er alle die 7 oder sogar 23 Formen der auf eine quadratische Gleichung führenden Aufgaben durch eine einzige Lösung dieser selbst ersetzte. Nur der Fall, daß beide Wurzeln negativ sind, fehlt auch bei ihm noch. Aber da er wenigstens negative Koeffizienten zuließ, war er

Diophant und den Arabern überlegen und erreichte unbewußt die Stufe der Inder wieder. Besondere Vorliebe zeigte er auch für quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. An zwei Stellen ist er dem Begriff des Logarithmus näher gekommen, als irgend jemand vor ihm. Erstlich, indem er nicht nur arithmetische und geometrische Reihen zusammenstellte, wie

| $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

was schon öfter und besonders klar von Chuquet (s. o. S. 73) geschehen war, sondern auf die praktische Wichtigkeit dieser Zusammenstellung besonders hinwies, wobei er die oberen Zahlen „Exponenten" nannte. Ferner hat er in der Lehre von den Proportionen, die er wesentlich algebraischer gab als die Scholastik sie überliefert hatte, den Oresmeschen Gedanken der gebrochenen Exponenten, der sich fortgepflanzt hatte, wenn auch der *Algorismus proportionum* (s. o. S. 67) nicht gedruckt worden war, geschickt benutzt, um Exponentialgleichungen wie etwa $(\frac{27}{8})^x = \frac{2187}{128}$ durch $x = 2\frac{1}{3}$, zu lösen. Dabei bedürfte es nur einer geringen Modernisierung der Ausdrucksweise, daß an der fraglichen Stelle unsere 7 Rechnungsarten klar hervorträten. In die 2. Ausgabe von Rudolffs *Coß* hat dann Stifel, der noch zwei volkstümliche Rechenbücher verfaßte, manches aus der gelehrten, lateinischen *Arithmetica integra* hineingearbeitet.

Die ersten Schriften dieser Art in England veröffentlichte der Kgl. Leibarzt Robert Recorde, alle in der Form von Katechismen. Wir erwähnen von ihnen vor allem das letzte, für uns wichtigste *The whetstone of witte* (London 1557), wo unser heutiges Gleichheitszeichen (in länger gestreckter Form) eingeführt wurde, das sich freilich nicht

sofort die Welt eroberte. Daß Recorde die deutsche Coß kannte, geht schon aus den angeführten ersten Titelworten hervor. Denn „Wetzstein" ist die Übersetzung von lat. „cos", welches scherzweise für Coß gesetzt wurde. In der Tat stützte sich Recorde hauptsächlich auf Stifels *Arithmetica integra*, dann aber auch auf verschiedene Werke des Tübinger Professors Joh. Scheybl, von denen das Rechenbuch *De numeris* von 1545 bemerkenswert ist, und auf die *Practica arithmeticae et mensurandi generalis* (Mailand 1539) des Italieners Cardano (s. u. S. 81), woraus auch Stifel zahlreiche schwierigere Aufgaben entnommen hatte. Ein vorausgehendes Werk Recordes *The ground of artes*, das die niedrigeren Rechnungsarten behandelte, erschien zuerst etwa 1542 zu London und erlebte wenigstens 28 Auflagen (die letzte 1699).

Zu Stifels *Arithmetica integra* hatte der berühmte Reformator Philipp Melanchthon eine kluge Vorrede über den Nutzen der mathematischen Studien geschrieben. Drei Briefe ähnlichen Inhaltes wie diese Vorrede waren von ihm schon gedruckt erschienen (*Math. discipl. . . . encomia*, Lugd. 1540). Er sorgte auch an einigen Universitäten, wie in Wittenberg, für die Einsetzung zweier eigentlich mathematischer Professoren nach dem Muster von Wien (s. o. S. 68). Diese lehrten freilich außer etwas Astronomie nur das Quadrivium (s. o. S. 33). Das Wichtigste ist aber die von der Reformation eingeleitete Bildung von Gymnasien, deren erstes (Nürnberg, 1526) von Melanchthon selbst gegründet wurde. Es folgten Ansbach (1528), Hamburg (Johanneum, 1529), Burghausen (um 1530), Augsburg (1531) und viele andere. An ihnen nahm überall das Quadrivium seinen bescheidenen Platz ein, und so gelang es der Mathematik, wenn auch sehr allmählich, innerhalb der allgemeinen Bildung sich eine feste Stellung zu verschaffen.

Unterdessen war in Italien die so viel begehrte algebraische Lösung der kubischen Gleichung herangereift. Im Jahre 1545 wurde sie zum erstenmal durch Geronimo Cardano († 1576), der an verschiedenen Universitäten hauptsächlich Medizin lehrte, in seinem Lehrbuch der Algebra *Ars magna* mitgeteilt. Aber Cardano war nicht der Erfinder. Er nennt selbst Scipione del Ferro († 1526; Professor in Bologna) und Tartaglia († 1557; s. o. S. 76), der in Brescia und Venedig Mathematik lehrte. Der erstere hatte sie nicht veröffentlicht, aber (um 1506) einem Freunde mitgeteilt, der Tartaglia (1535) durch Stellung von Aufgaben herausforderte. Daraufhin will Tartaglia selbst eine Lösung gefunden haben. Ferros Lösung war zwar nach seinem Tode auch bei seinem Schwiegersohn hinterlegt worden, und möglicherweise kannten sie noch andere Freunde Ferros. Doch war es schon damals unmöglich, Tartaglia Unselbständigkeit nachzuweisen. Auf alle Fälle ist Ferro der unbestrittene erste Erfinder, und Cardano lieferte einen selbständigen (geometrischen) Beweis für die ihm auf seine Bitte durch Tartaglia mitgeteilte Lösungsvorschrift. Auch sonst zeigte Cardano, der im übrigen wie Stifel große Neigung für phantastische Dinge hatte, eine weit fortgeschrittene Einsicht in den Bau der kubischen Gleichung und machte zum erstenmal richtige Rechenversuche mit Wurzeln aus negativen Größen, die er in einer späteren (noch nicht hinreichend gewürdigten) Arbeit, *Sermo de plus et minus*, fortsetzte. In dieser nimmt Cardano schon bezug auf Raff. Bombelli († 1565), der in seiner vorzüglichen *Algebra* (Bologna 1572) weitere Fortschritte in dieser Richtung gemacht hatte, wozu der sog. irreduzible Fall anregte.

Einem Schüler Cardanos, Lodovico Ferrari (geb. 1522), war weiterhin die algebraische Lösung der Gleichungen 4. Grades durch Zurückführung auf eine kubische

Resolvente gelungen, und Cardano konnte auch dies schon in seiner *Ars magna* mitteilen.

Da Cardano geschworen hatte, nichts von der ihm mitgeteilten Lösung zu veröffentlichen, war natürlich Tartaglia sehr erzürnt, und es entspann sich eine lebhafte Brieffehde zwischen ihm und Cardanos Vertreter Ferrari. Tartaglias Entrüstung ist um so begreiflicher, als er selbst ein großes Werk über Arithmetik, Algebra und praktische Geometrie vorbereitete, worin er die Lösung der kubischen Gleichungen wohl selbst als erster veröffentlichen wollte. Dieses Werk erschien erst 1556—60 zu Venedig in 3 Bänden unter dem Titel *General trattato di numeri et misure.* Die Gleichungen 3. Grades fehlen darin ganz. Es ist sonst von großer Reichhaltigkeit und zeigt Eigenart in der Form und in Einzelheiten. Wir begnügen uns aber, noch zu bemerken, daß die S. 76 erwähnte italienische Euklidausgabe von Tartaglia nach Campanus und Zamberti angefertigt wurde.

Von Cardano müssen wir noch das Werk mit dem nicht sicher erklärbaren Titel *De regula Aliza* (Basel 1570) anführen, das eine Ergänzung zur *Ars magna* von 1545 bildet. Eine weitere Ergänzung *Ars magna arithmeticae* erschien erst mit dem erwähnten *Sermo* 1663 in dem IV. Band der *Opera.* Wie Tartaglia, schrieb auch Cardano über das Würfelspiel, das er selbst viel übte. Damit beginnt die Kombinationslehre sich auf einen etwas höheren Stand zu erheben, und es werden Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen versucht.

In Deutschland teilte Stifel am Schluß seiner Ausgabe von Rudolffs *Coß* die Regeln zur Lösung der kubischen Gleichungen nach Cardano mit und gab einige Beispiele. Eine größere Sammlung, mit anderen Aufgaben untermischt, gab erst der Ulmer Rechenmeister Joh. Faulhaber († 1635) in seinem *Arithmetischen Cubiccossischen*

*Lustgarten* (Ulm 1604), und der Nürnberger Rechenmeister Peter Rothe (s. u. S. 85) lieferte dazu die Ausrechnung in seiner *Arithmetica philosophica* (Nürnberg 1608). Faulhaber hat sich in zahlreichen Schriften, die die schrulligsten Titel führen und mit allerlei Mystik gespickt sind, besonders mit Polygonal- und Polyedralzahlen beschäftigt. Dabei kamen doch wirkliche Leistungen zustande. So trieb er u. a. die Summierung der Potenzen der ganzen Zahlen (s. o. S. 53) immer weiter. Schließlich gelangte er in der *Academia algebrae* (Ulm 1631) bis zu $\Sigma n^{17}$, womit gleichzeitig die 8 ersten Bernoullischen Zahlen (s. das 2. Bdchen.) vorweggenommen waren.

Eine bedeutsame formale Förderung erfuhren Arithmetik und Algebra wieder durch den Holländer Simon Stevin († 1620), der zuerst Kaufmann, später Ingenieur war. Im Jahre 1582 gab er Zinstafeln, 1585 die Schrift *De thiende* (= der zehnte, nämlich Teil) heraus. Diese beiden Schriften erschienen dann, zusammen mit mehreren anderen arithmetisch-algebraischen Werken, darunter 4 Büchern Diophant, in einem fast 900 Seiten haltenden Sammelband zu Leiden 1585 unter dem Titel *L'arithmétique* in französischer Sprache. Stevin kennt die meisten der von uns genannten Mathematiker. Außerdem führt er noch Rainer Gemma Frisius an, dessen (lateinisches) Rechenbuch (Antwerpen 1540) in der Auflagenzahl (im 16. Jahrhundert allein wohl über 60) nicht einmal durch die (deutschen) Bücher von Riese (s. o. S. 77) übertroffen wurde. Die Schrift *De thiende* (frz. *La disme*) ist die erste systematische Darstellung des Dezimalbruchrechnens mit einem heute noch nicht unnötigen Aufruf an die Regierungen aller Länder, das dezimale Maßsystem einzuführen. Die dezimale Schreibung war ja schon durch astronomische Tafeln von Peurbach und Regiomontan (s. o. S. 74) vorbereitet worden. In einem ähnlichen

*Canon mathematicus* trennte 1579 François Viète (lat. Vieta; s. u. S. 92) durchweg die erste Ziffer von den übrigen ab, was auch gelegentlich schon in Rechenbüchern geschehen war. Stevin schreibt noch hinter jede Ziffer ihre Stellenzahl in einem Ringelchen. Dasselbe tat er in Nachahmung Bombellis (s. o. S. 81) mit den Exponenten der Unbekannten, die er aber direkt hinter den Koeffizienten setzte, ohne die Grundzahl zu schreiben. Die Exponenten der Wurzeln schrieb er in gleicher Weise hinter das Wurzelzeichen.

Diese zur modernen Schreibart führende Bezeichnungsweise übernahm nun zwar Viète nicht, wie wir uns überhaupt immer vorstellen müssen, daß die verschiedensten Symbole oft lange nebeneinander herliefen, bis sich eines von ihnen allgemein durchsetzte. Aber Viète († 1603; juristischer Staatsbeamter) führte in der 1591 zu Tours erschienenen *In artem analyticam isagoge* (d. h. Einführung in die analytische Kunst) eine Neuerung ein, die sich als grundlegend erwies. Er setzte nämlich in den Koeffizienten der Gleichungen Buchstaben statt der Zahlenbeispiele, wodurch es überhaupt erst möglich wurde, die Gleichungslösungen durch Formeln auszudrücken. Dadurch wurden systematisch (s. o. S. 77) auch die Potenzen beliebiger allgemeiner Zahlen zur Einführung gebracht die dann bald der Holländer Adriaen van Roomen (um 1598/99) in einem Kommentar[1]) zur Algebra des Alḫwārazmī an Stevin anknüpfend in der Form A (3), B (4) usw. schrieb. Diese Schreibweise ging über $a3$, $b4$ bei Hérigone (*Cursus math.*, Paris 1634) in Descartes' *Géométrie* (Leiden 1637; s. u. S. 116) in $a^3$, $b^4$ über.

Viètes Bedeutung als Algebraiker ist durch das Angegebene noch nicht erschöpft. Er schrieb noch mehrere

*) Der Kommentar wurde zum Teil gedruckt, aber nicht veröffentlicht.

algebraische Abhandlungen, die zum Teil erst nach seinem Tode gedruckt wurden. Wir erwähnen aus der einen von ihnen den formelmäßig ausgedrückten Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung, sowie die erste trigonometrische Lösung der kubischen Gleichung (eine kommt bei Bombelli in seiner nicht veröffentlichten Geometrie vor). Aus einer anderen seien unbestimmte Aufgaben höherer Art im Stile Diophants hervorgehoben, aus einer dritten eine vielbeachtete Näherungsmethode für höhere numerische Gleichungen. In dieser letzteren Hinsicht kommen als Vorgänger (außer den Arabern; vgl. o. S. 50) nur Cardano (1545) und Stevin (1585) mit wesentlich unvollkommeneren Verfahren in Betracht. Ein gleichzeitiges, von dem vielseitigen Joost Bürgi (s. u. S. 87) nicht ungeschickt behandeltes Beispiel wurde nicht veröffentlicht.

Trotzdem seit Alẖwārazmī (um 825; s. o. S. 46) gelegentlich immer einmal beide Lösungen der quadratischen Gleichungen berücksichtigt wurden, kam man doch, da negative Lösungen praktisch auch von den Indern nicht zugelassen wurden, erst durch die kubischen Gleichungen auf den Gedanken, daß im allgemeinen jede Gleichung höheren Grades mehrere Lösungen besitze. In der Form, daß jede Gleichung „meistens" so viele Wurzeln habe als ihr Grad anzeigt, findet sich der Satz zum erstenmal in Rothes (deutscher) *Arithmetica philosophica* (1608) gedruckt. Albert Girard (dtsch. Gerhardt), niederländischer Ingenieur (wahrscheinlich ein eingewanderter zweisprachiger Lothringer; † 1632) zog die negativen und imaginären Wurzeln heran, um in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* (Amsterdam 1629) den Satz bestimmter aussprechen zu können. Ganz neu ist bei ihm die allgemeine Darstellung der Summen der 4 ersten Potenzen der Wurzeln einer Gleichung durch deren Koeffizienten. Im For-

malen schloß er sich Viète und Stevin an, dessen Werke in seiner Übersetzung 1634 französisch erschienen. Die geometrischen und bautechnischen Werke von Samuel Marolois (1627/29) gab er verbessert auch in deutscher Sprache heraus.

Noch besser als bei Viète und Girard ist die Darstellung der einzelnen Koeffizienten einer Gleichung durch deren Wurzeln bei dem Engländer Thomas Harriot zu finden, dessen *Artis analyticae praxis* zu London im Jahre 1631, zehn Jahre nach seinem Tode, herausgegeben wurde. Harriot zerlegte auch Gleichungen mit reellen Wurzeln in ihre linearen Faktoren. Er ersetzte die von Viète, im Gegensatz zum überwiegenden mittelalterlichen Gebrauch, eingeführten großen Buchstaben wieder durch die kleinen und wurde damit für alle Zeiten vorbildlich. Auch benützte er das Recordesche Gleichheitszeichen und führte die Zeichen $>$ und $<$ ein. Doch fehlten ihm Potenzsymbole. Ebenfalls im Jahre 1631 erschien zu London die erste Auflage der *Clavis mathematicae* (d. i. Schlüssel der Math.) des Landpfarrers William Oughtred († 1660), der nicht nur durch dieses öfter aufgelegte, viele Fortschritte in der algebraischen Rechenweise zeigende Werk, sondern auch durch Privatunterricht (s. u. S. 130) die Kenntnis der Mathematik verbreiten half. Oughtred führte über 150 neue Symbole ein, von denen für uns das $\times$-Zeichen noch von Interesse ist. Dieses kommt zwar schon 1618 vor, stammt aber auch dort wahrscheinlich von Oughtred. Er erfand auch den kreisförmigen und den geradlinigen Rechenschieber und beschrieb diese Instrumente 1632 bzw. 1633. Der erstere wurde von seinem Schüler Rich. Delamain, der ihn auch selbst erfunden haben will, schon 1630 beschrieben.

Wir kommen noch auf zwei Franzosen zurück, deren hier einschlägige Hauptleistungen etwas abseits von den bis-

herigen Gesichtspunkten liegen. Es ist das zuerst der Antoniter Johannes Buteo aus der Dauphiné, der unter Kenntnis der Vorgänger zu Lyon im Jahre 1559 eine nicht unbedeutende *Logistica* (d. i. Arithmetik mit Algebra) herausgab, in der er u. a. lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten mittels der uns heute geläufigen Additionsmethode behandelte. Als tüchtiger Geometer hat sich Buteo gleichfalls bewiesen. Auch mit linearen Gleichungen, aber solchen unbestimmter Art, befaßte sich in entscheidenderweise Cl. G. Bachet, Sieur de Méziriac. Er stellte zum erstenmal in Europa (vgl. o. S. 42) klar die Forderung nach Ganzzahligkeit. Die Gleichungen dienten ihm zur Auflösung mathematischer Scherzaufgaben, die er in dem zu Lyon 1612 (2. Aufl. 1624) erschienenen Buche *Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres* zusammenstellte. Dadurch wurde er nicht nur der Vater der neueren[1]) Unterhaltungsmathematik, die ja schon bei Alkuin (s. o. S. 57) eine gewisse Rolle gespielt hatte, sondern er gab auch der Zahlentheorie neuen Antrieb, der er den größten Dienst durch die Veranstaltung der ersten griechischen Diophantausgabe (mit lat. Übersetzung und Anmerkungen; Paris 1621) erwies.

Das Gebiet der Algebra sollte aber noch nach einer anderen Seite ungeahnterweise eine Erweiterung erfahren, die gerade in jener Zeit der vermehrten und verfeinerten astronomischen Beobachtungen von der größten Wichtigkeit war. Durch Verengerung der zwei einander zugeordneten arithmetischen und geometrischen Reihen, die im Wesen auf Archimedes' Sandrechnung (s. o. S. 21) zurückgehen und deren Gesetze Stifel am besten erkannt hatte (s. o. S. 79), kamen ungefähr gleichzeitig Joost Bürgi (Mechaniker, Astronom; s. o. S. 85) und der schot-

[1]) Einen Anfang bildet schon die „Schimpfrechnung" des 16. Jahrhunderts.

tische Gutsbesitzer John Napier († 1617) auf den Gedanken, logarithmische Tafeln zu berechnen, was sie nach völlig verschiedenen Methoden ausführten. Der erstere brachte sich aber um den ganzen Ruhm, da er seine *Progreß Tabulen* erst 1620 zu Prag, noch dazu ohne die auf dem Titel versprochene Erläuterung, erscheinen ließ. Hingegen gab Napier schon 1614 zu Edinburg eine *Descriptio* seines Systems heraus, der 1619 die *Constructio* folgte, die handschriftlich der ersteren vorausging und die Berechnungsmethode erläuterte. Weder Bürgi noch Napier gingen von dem Begriff einer Grundzahl aus, der sich aus Stifels Proportionslehre (s. o. S. 79) hätte unschwer entnehmen lassen. Erst wenn man bei beiden in geeigneter Weise ein Dezimalkomma anbringt, kann man sagen, daß die Bürgischen Logarithmen angenähert die Basis $e$, die Napierschen angenähert die Basis $1/e$ haben. Napiers *Descriptio* ist eine Tafel für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, Bürgis Tafeln sind rein numerisch.

Der Gedanke der Logarithmen faßte bei einzelnen sofort Fuß, und in England war es der Londoner Professor Henry Briggs, der mit Napier (modern ausgedrückt) die Grundzahl 10 verabredete, worauf dieser selbst in einem Anhang zur *Constructio* schon hingewiesen hatte. Briggs gab dann eine entsprechende Tafel (*Arithmetica logarithmica*, London 1624) zunächst der Zahlenlogarithmen heraus. Auf dem Festlande setzte dieses Werk der Holländer Adriaen Vlacq, der selbst Verlagsbuchhändler war, von 1628 an in vorbildlicher Weise fort. Von den Astronomen nahm zuerst Benjamin Ursinus (dtsch. Behr) das neue Hilfsmittel auf, indem er die Napierschen Logarithmen zunächst gekürzt 1618 zum Abdruck brachte und dann neu und genauer berechnete. Von der größten Bedeutung waren sie für Joh. Kepler (s. o. S. 72), der

eben mit der Durchprüfung der Tycho Braheschen Beobachtungen des Mars beschäftigt war. Er hatte Bürgi lange vergeblich zur Veröffentlichung gedrängt, gab dann selbst 1624 eine Tafel (von Zahlenlogarithmen) heraus und legte die Napierschen Logarithmen auch seinen *Tabulae Rudolphinae* (Ulm 1627) zugrunde. Die Napierschen Logarithmen wurden aber bald von den Briggs-Vlacqschen verdrängt. Übrigens war Napier zu seiner Zeit durch eine Erläuterung der Offenbarung Johannis noch viel berühmter, denn als Mathematiker und er sagte wie Stifel (s. o. S. 78) das Ende der Welt auf einen bestimmten Termin voraus. Napier hat auch eine *Ars logistica* geschrieben, die vielleicht, wenn sie auch erst im Jahre 1839 gedruckt wurde, doch in manchen Punkten die algebraische Symbolik bei Harriot und Oughtred (s. o. S. 86) beeinflußt hat.

### C. Geometrie.

Die Elementargeometrie und überhaupt die reine Geometrie machte im 16. Jahrhundert keine wesentlichen Fortschritte. Es erschienen auch nur wenige Werke, die ihr allein gewidmet waren. Doch enthielten Rechen- und Algebrabücher vielfach geometrische Abschnitte. Das beste in dieser Hinsicht gab wohl Tartaglia in seinem *General trattato* (1556/60; s. o. S. 82) mit einer Reihe eigenartiger, zum Teil wohl neuer Konstruktionen, von denen eine Anzahl mit fester Zirkelöffnung (s. o. S. 49) ausgeführt ist.

Ganz abseits liegt die Entdeckung der Kugelloxodrome (Name von Snellius 1624; s. u. S. 101) durch den Portugiesen Pedro Nunes, der sie in einer geographischen Schrift 1537 bekannt machte. Von demselben stammt auch eine erwähnenswerte *Algebra* in spanischer Sprache (Antwerpen 1567). Der „Nonius“ ist jedoch fälschlich nach ihm benannt. Eine solche Teilung beschrieb zuerst für

Winkelmessung der Jesuit Christoph Clavius aus Bamberg (deutscher Name nicht feststellbar) in seinem *Astrolabium* (Rom 1593) und für geradlinige Messung in der *Geometria practica* (Rom 1604). Mit mehr Recht wird der Nonius nach dem Niederländer Pierre Vernier benannt, der seinen Gebrauch in dem Buche *La construction . . du quadrant nouveau* (Brüssel 1631) auseinandersetzte. Von Clavius, der bei Einführung des Gregorianischen Kalenders (1582) in hervorragender Weise tätig war, sei auch gleich seine (sehr gewissenhafte und zum Teil kritische) lateinische Euklidausgabe mit Kommentar erwähnt, die zuerst 1574 zu Rom erschien und viele Auflagen erlebte (s. a. u. S. 116).

Clavius hat in seinem *Astrolabium* auch die stereographische Projektion (Name von Aiguillon, 1613) behandelt, die, wohl schon Hipparch (s. o. S. 27) bekannt, durch Ptolemaios' *Planisphaerium* (Neuausgabe 1558 von Federigo Commandino; s. a. o. S. 62) verbreitet worden war. Commandino († 1575; Arzt) hat außerdem zahlreiche griechische Mathematiker lateinisch herausgegeben. Im Jahre 1565 ließ er auch eine eigene Schrift über Schwerpunktsbestimmungen von Körpern erscheinen. Solche Bestimmungen, die seit Pappos (s. o. S. 36) geruht hatten, waren schon 1548 von Fr. Maurolico († 1575) vorgenommen worden (veröff. erst 1685), dessen Vater, griechischer Arzt, vor den Türken nach Messina geflohen war. Dort wurde der Sohn Priester und übersetzte neben anderen griechischen Klassikern der Mathematik Apollonios und Archimedes ins Lateinische (erschienen erst 1654 bzw. 1685; s. u. S. 97). Hier sei auch angefügt, daß Euklid in der arabischen Übersetzung des Naṣīr eddīn im Jahre 1594 zu Rom herausgegeben wurde.

Der Hugenotte Pierre de la Ramée (lat. Ramus), Universitätslehrer der Philosophie und Beredsamkeit, der

bei der Pariser Bluthochzeit (1572) als Opfer fiel, gab 1569 zu Basel eine Geometrie in 27 Büchern mit kurzer Arithmetik heraus, die viele Auflagen erlebte. Wir erwähnen ihn aber hier hauptsächlich wegen seiner 31 Bücher *Scholarum mathematicarum* (ebenfalls Basel 1569). Er unterwirft darin die Elementarmathematik ausführlichen philosophischen Erörterungen und richtet insbesondere Angriffe gegen Euklid in methodischer Hinsicht, die den späteren Unterricht in Frankreich offenbar stark beeinflußten. Die Angriffe sind vom Schulstandpunkt aus vielfach berechtigt, lassen aber tiefere Einsicht in Euklids Strenge, wie auch Verständnis für die geschichtliche Stellung der „Elemente" vermissen.

Wirkliche geometrische Leistungen liegen bei Giov. Benedetti, herzogl. savoyischem Mathematiker, vor, der 1553 in seiner Vaterstadt Venedig ein eigenes Werk über Konstruktionen mit fester Zirkelöffnung (s. o. S. 89) erscheinen ließ. Auch in seinen 1580 zu Turin gedruckten *Diversae speculationes math. et phys.* sind, neben einer Perspektive und einer geometrischen Mechanik, auch noch elementargeometrische Einzelheiten enthalten. Ein anderer Italiener Guidubaldo del Monte († 1607), der in einer Theorie des Planisphärs (Pesaro 1579) verschiedene geometrische Konstruktionen der Ellipse benutzte, und eine Fadenkonstruktion der Hyperbel dazufügte, hat in seiner Perspektive (Pesaro 1600) besonders die Theorie der Fluchtpunkte theoretisch behandelt und eine eigene Schrift über die Schraubenlinie (*De cochlea*, Venedig 1615) geschrieben, die auch seit Pappos (s. o. S. 36) kaum mehr Beachtung gefunden hatte.

Stevin (s. o. S. 83) hat ebenfalls eine erwähnenswerte Perspektive geschrieben. Sie erschien zuerst in den *Wisconstige Gedachtenissen* (gleichzeitig lat. und frz.; Leiden 1605/08), wo auch die Loxodrome behandelt ist. Zu Ant-

werpen 1583 hatte er schon vorher 5 Bücher *Problematum geometricarum* herausgegeben, die dann mit seiner „Praktischen Geometrie“ (ersch. erst 1634; s. o. S. 86) verschmolzen.

Ebenso bedeutend als Geometer wie als Algebraiker war Viète (s. o. S. 84). In seiner Schrift *Effectionum geometricarum canonica recensio* (gedruckt um 1593) sind zum erstenmal systematisch den Lösungen der einfachsten Gleichungsformen die entsprechenden geometrischen Konstruktionen beigesellt. Ähnliches tat Cataldi (s. u. S. 109) 1618. Zusammengesetztere geometrische Aufgaben löste aber systematisch durch algebraischen Ansatz und nachfolgende Konstruktion des erhaltenen Ausdruckes zum erstenmal Marino Ghetaldi, ein Patrizier aus Ragusa, in zwei Werken von 1607 und 1630. Ihm schloß sich Oughtred 1631 (s. o. S. 86) an. In einem auch wohl 1593 erschienenen *Supplementum geometriae* zeigte Viète, daß jede kubische oder biquadratische Aufgabe sich auf Einschiebung zweier mittleren Proportionalen (s. o. S. 12) bzw. auf eine Winkeldrittelung zurückführen lasse. Ähnliche Aufgaben erörtert Viète im *Pseudomesolabum* von 1596, wo in einem Zusatz auch die Aufgabe ein Sehnenviereck aus den vier Seiten zu zeichnen, gelöst wird. Zu dieser Aufgabe hatte bis dahin das Beste Benedetti (1580; s. o. S. 91) beigetragen und der Hochschullehrer Johannes Praetorius (dtsch. Richter), der Erfinder des Meßtisches, gab im Jahre 1598 eine eigene Schrift darüber heraus. Eine der schönsten Leistungen Viètes ist die elementare Lösung der Apolloniosschen Aufgabe (s. o. S. 27), an drei Kreise einen Berührungskreis zu legen. Viète machte, der Überlieferung folgend, 10 Aufgaben aus der einen, indem er Punkte und Gerade als Ausartungen der Kreise einführte, und löste die höchste, indem er auf die niederen bauend zu ihr aufstieg. Viète war auch,

was von seiner Kombinationsgabe zeugt, wie später Wallis (s. u. S. 106) ein geschickter Dechiffreur.

Um dieselbe Zeit versuchten auch andere, wie Ghetaldi (s. o. S. 92), Willebrord Snellius (s. u. S. 95) und Girard (s. o. S. 85), Wiederherstellungen klassischer Schriften, zu denen etwas später noch Pierre de Fermat (s. u. S. 129) trat. Besonders glücklich war noch später in dieser Hinsicht „der letzte Schüler Galileis", Vincenzo Viviani, großherzogl. toskanischer Mathematiker († 1703; Florenz). Er veröffentlichte 1659 eine „Divinatio" des 5. Buches der Apollonischen Kegelschnittlehre (s. o. S. 24) und erlebte die Genugtuung, daß eine zu Florenz 1661 herausgegebene Übersetzung nach einer arabischen Handschrift seine Vermutung bestätigte. Der mathematische Teilnehmer an dieser Übersetzung, Professor Giov. Alf. Borelli, kann auch mit seinem *Euclides restitutus* (1. Aufl. Pisa 1658) genannt werden, weil er dort, im Anschluß an Clavius, versuchte, die Schwierigkeit der Parallelenlehre zu beheben; Girard müssen wir noch anführen, weil er an Stevin anknüpfend, einer trigonometrischen Tafel (im Haag 1626) eine Einteilung der ebenen Vielecke mit Einschluß der einspringenden und überschlagenen vorausschickte. Kepler zeichnete ein Sternvierzigeck in seinem *Mysterium cosmographicum* (Tübingen 1596) und betrachtete weitere Sternvielecke in der *Harmonice mundi* (s. o. S. 72).

Eine umfangreichere und beliebte *Geometria practica* gab in deutscher Sprache der Altdorfer Professor Daniel Schwenter heraus (1. Aufl. in 4 Traktaten, Nürnberg 1618—27). Ihr mag die Faulhabersche (s. o. S. 82) *Ingenieurs-Schul* (1. Aufl. Frankfurt a. M. 1630—33) angeschlossen werden, die unter Hinweis auf die *Miracula arithmetica* (Augsburg 1622), einen Sonderfall des Satzes enthält, den wir heute $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ schrei-

ben. Den allgemeinen Satz hatte aber Descartes (s. u. S. 116) schon um 1620 aufgestellt und Faulhaber vielleicht mitgeteilt. Hierher gehören auch die verschiedenen Instrumente zur Zeichnung von Kegelschnitten, die um jene Zeit erfunden wurden. Wir wollen zuerst Benjamin Bramer erwähnen, der in seinem *Apollonius Cattus* (1. Aufl. Cassel 1634) eine Reihe solcher Instrumente angab. Der Titel des Buches rührt davon her, daß sein Hauptinhalt eine elementare (hessische!) Kegelschnittlehre ist. Dann sei auch noch Frans van Schooten angeführt, der im Jahre 1646 zu Leiden ein eigenes Buch über die Zeichnung von Kegelschnitten herausgab. Auch der Jesuit Christoph Scheiner, ein Schwabe, erfand einen Kegelschnittzirkel und den Storchschnabel, den er 1631 beschrieb.

Kein Wunder, daß jene Zeit die so lange vernachlässigten Kegelschnitte wieder mehr pflegte. Hatte doch der Württemberger Kepler gezeigt (*Astronomia nova*, Heidelberg 1609), daß sie sich weit besser zur Beschreibung der Planetenbahnen eigneten als die noch von Coppernicus (*De revolutionibus*, Nürnberg 1543; s. u. S. 97), der das sog. Ptolemäische System aus den Angeln gehoben hatte, benutzten Epizykel und Exzenter. Kepler selbst widmete einen Paragraphen seiner optischen Schrift *Ad Vitellionem paralipomena* (Frankfurt a. M. 1609) den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte, wobei er schon die Parabel als Grenzfall der Ellipse auffaßte. Ebenfalls im Hinblick auf optische Anwendungen gab eine ausführliche Kegelschnittlehre in 4 Büchern ein reicher Pariser Privatmann Claude Mydorge heraus (*Prodromus catoptricorum*; Paris 1631). Eigens zum Gebrauche bei der Konstruktion von Sonnenuhren hatte schon Maurolico 1553 eine kleine Kegelschnittlehre verfaßt (veröff. Venedig 1575 in den *Opusc. math.*). Die allererste abendländische stammt aber von dem Nürnberger Pfarrer Johannes Werner

(† 1528), der in seinem *Libellus* (Nürnberg 1522) 22 Sätze über Parabel und Hyperbel am Kegel bewies.

Die Quadratur des Kreises beschäftigte fortdauernd die Geister. Der uns schon bekannte Buteo gab in einer Schrift *De quadratura circuli* (Lyon 1559) klug abwägend eine Darstellung des bis dahin Erreichten. Aber es gab noch im 17. Jahrhundert Verfechter einer exakten Quadratur, wie den sonst tüchtigen Mathematiker Gregorius a St. Vincentio (1647; s. u. S. 105). Mittels der Archimedischen Vielecksmethode gab Viète in einem Anhang zum *Canon math.* (1579; s. o. S. 84) die Zahl $\pi$ auf 10 Dezimalstellen an. In dem *Variorum de rebus mathematicis liber VIII* (um 1593) leitete er daneben noch aus einem antiken Verfahren das unendliche Produkt

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

her. Van Roomen (s. o. S. 84) berechnete (*Ideae math.*, Antwerpen 1593) $\pi$ auf 15, Ludolph van Ceulen (= Cöln) aus Hildesheim, Prof. in Leiden († 1610) zuerst auf 20 Dezimalstellen (*Vanden Circkel*, 1. Aufl. Delft 1596). Nach seinem Tode teilte die Witwe in den *Aritm. en Geom. fondamenten* (Leiden 1615) 33 Stellen mit, und auf dem Grabstein wurden 35 eingehauen. Dabei hatte van Ceulen schon für 20 Stellen das reguläre $(15 \cdot 2^{31})$-Eck heranziehen müssen. Die furchtbaren Rechnungen veranlaßten Snellius (s. o. S. 89), der 1619 zu Leiden eine lateinische Bearbeitung der beiden van Ceulenschen Werke herausgab, das Verfahren in einer eigenen Schrift *Cyclometricus* (Leiden 1621) zu verbessern, in der er auch die Geradstreckungsmethode des Cusanus (s. o. S. 68) von neuer Seite beleuchtete und zur Berechnung von $\pi$ verwendete. Sein Verfahren steht dem seines Landsmannes Philipp van

Laensbergh (*Cyclometria*, Middelburg 1616) nahe, der 28 Stellen von $\pi$ berechnet hatte.

Nur aus einem Bericht von Praetorius (s. o. S. 92) weiß man, daß ähnlich genaue Werte für $\pi$ wie Viète schon 1573 der spätere Wittenberger Professor Valentin Otho († 1605?) besaß. Dieser legte gleichzeitig den Näherungswert $\pi = \frac{355}{113}$ vor, den man vielfach noch heute nach Adriaen Metius (Dozent in Jena und Franeker; † 1635) benennt, der ihn von seinem Vater Adriaen Anthonisz(oon) (aus Metz; † 1607) hatte und 1625 veröffentlichte. Aus der Tatsache, daß sich der Wert $\frac{355}{113}$ auch bei einem Chinesen des 5. Jahrhunderts feststellen ließ, möchten wir eher umgekehrt den Schluß ziehen (vgl. o. S. 8), daß er noch älter ist und vielleicht Archimedes zum Urheber hat.

Snellius' Bemühungen zur Verbesserung der Berechnung der einem Kreis ein- und umbeschriebenen Vielecke setzte in entscheidender Weise Christian Huygens (s. u. S. 108) fort. Veranlassung waren die erwähnten fehlerhaften Versuche des Gregorius. Huygens' Ergebnisse, die er in einem Werk „Erfindungen zur Kreismessung" (*De circuli magnitudine inventa*, Leiden 1654) mitteilte, sind derart scharf, daß er bei einer Genauigkeit von 9 Stellen für $\pi$ bereits mit dem regelmäßigen 60-Eck auskommen konnte. Ähnliche Sätze, wie Huygens für den Umfang, stellte der Schotte James Gregory († 1675 als Professor in Edinburg) für den Inhalt der Vielecke auf. Sein Gedankengang, veröffentlicht in der Schrift *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Padua 1667), war für Ellipse und Hyperbel gleichmäßig anwendbar.

### D. Trigonometrie.

Regiomontans Trigonometrie erschien freilich erst 1533 (s. o. S. 74). Aber seine Gedanken und auch seine Quellen blieben anderen nicht unbekannt. So verfaßte

Joh. Werner (vor 1528; s. o. S. 94) eine Trigonometrie in 5 Büchern, die erst in der letzten Zeit wieder aufgefunden und veröffentlicht wurde. Werner erfand die sog. prosthaphairetische Methode, die darin bestand, größere Multiplikationen mittels der Formel $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ und der entsprechenden für $\cos\alpha \; \cos\beta$ auszuführen. Apian (s. o. S. 78) gab das Werk von Ǵābir, das Regiomontan benutzt hatte, zu Nürnberg 1534 in Druck. Um dieselbe Zeit wurde von Gemma Frisius in einem *Libellus* von 1533 die Methode der Triangulation begründet und damit der Trigonometrie ein weites Anwendungsfeld eröffnet. Die Hauptsache blieb aber noch für lange die Anwendung am Himmel, und der Preuße Nikolaus Coppernicus (geb. in dem auch damals polnischen Thorn, † 1543 als Domherr von Frauenburg) stellte sich die für sein Hauptwerk (s. o. S. 94) benötigte Trigonometrie unter Kenntnis von Ǵābirs und später auch von Regiomontans Werk selbst zusammen. Er verwendete zur Ableitung der sphärischen Sätze die heute noch übliche stereometrische Methode, die zuerst durch das *Opus palatinum* des Rhaeticus (veröffentlicht erst durch Val. Otho zu Neustadt a. d. Haardt im Jahre 1596; s. o. S. 96) weiter verbreitet wurde. Rhaeticus, so genannt, weil er aus Vorarlberg stammte, hatte von Coppernicus gelernt und war auch in den Besitz von Werners Trigonometrie gekommen. Er veröffentlichte schon 1551 zu Leipzig einen *Canon* mit trigonometrischer Einleitung, der zum erstenmal alle 6 Funktionen enthielt. Das umfangreiche *Opus palatinum* hat denselben Charakter und enthält eine bis zur Langweiligkeit gründliche Trigonometrie. Maurolico fügte einem im Jahre 1558 zu Messina erschienenen Sammelband von Übersetzungen (s. o. S. 90) eine eigene Sphärik an, die wir wegen der allgemeineren Erfassung des Tangentenbegriffes erwähnen.

Viète, den wir bisher als Algebraiker und Geometer kennen lernten (s. o. S. 84 u. 92), hat auch für die Entwickelung der Trigonometrie entscheidende Bedeutung. Er nahm zum erstenmal algebraische Rechnungen und Umformungen in der Trigonometrie vor, bildete die Methoden zur Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke systematisch aus, indem er alle 6 Funktionen benutzte (Regiomontan gebrauchte noch den Sinus allein), und baute die schwachen Anfänge einer Goniometrie (s. o. S. 35) zu einem ersten Formelsystem aus. In der Ebene gehört ihm die erste Fassung der Kosinussatzes an, auf der Kugel verwendete er das polare Entsprechen der Sätze, fügte zu dem in einfacherer Form als bei Regiomontan ausgesprochenen Kosinussatz für die Seiten den für die Winkel und stellte den Kotangentensatz mit seinem polaren Gegenstück auf (s. o. S. 53). Das alles ist zum Teil in dem Anhang zum *Canon* von 1579 und in der Schrift von 1593 (s. o. S. 92) enthalten. Daß Viète auch die Entwicklung von sin $n\alpha$ und cos $n\alpha$, obwohl er das allgemeine Bildungsgesetz noch nicht hinschreiben konnte, vollständig beherrschte, bewies er durch Lösung einer Gleichung 45. Grades, die Adriaen van Roomen 1593 (s. o. S. 95) „allen Mathematikern der Welt" vorgelegt hatte. Er zeigte in einem *Responsum* (Paris 1595), daß es sich um die Formel für sin $45\alpha$ handle, gab alle positiven Lösungen und behandelte den Gegenstand noch in einer eigenen Schrift *Ad angulares sectiones theoremata*, die erst 1615 zu Paris herausgegeben wurde. Mit dem Gesetz der „Winkelschnitte" waren übrigens um dieselbe Zeit auch Bürgi (handschriftlich; s. o. S. 87) und Ludolph van Ceulen (*Vanden Circkel* 1596; s. o. S. 95) vertraut.

Die Begründung der von Viète im *Canon* gegebenen trigonometrischen Formeln stellte ein französischer Mathematikprofessor Maurice Bressier in seiner *Metrice*

*astronomica* (Paris 1581) auf eine einheitliche Grundlage. Bei ihm findet sich zum erstenmal die Figur, die eine übersichtliche Zusammenfassung der sechs Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gestattet. Diese Zusammenfassung leistete aber erst Nathaniel Torporley in seinem sonst sonderbaren Buche *Diclides coelometricae* (d. h. Doppeltür zur Himmelsmessung; London 1602). Neper (s. o. S. 88) konnte daraus unschwer seine Regel ableiten (s. u. S. 102).

Noch nicht ganz an Viète, wohl aber an Rhaeticus und Bressier schloß sich der Däne Thomas Finck (Arzt und Mathematiker, † 1596) an mit einem sehr geschickten Trigonometriebuch, das er unter dem Titel *Geometria rotundi* zu Basel im Jahre 1583 herausgab. Auch er benutzte alle 6 Funktionen, wobei er die Namen „Tangente" und „Sekante" neu einführte. In der ebenen Trigonometrie hat er den Tangentensatz aufgestellt. Von Finck beeinflußt sind Clavius (*Astrolabium*; s. o. S. 90), der Astronom Giov. Ant. Magini (*De planis triangulis* etc., Venedig 1592), der später noch ein wesentlich wichtigeres, eigenartiges Tafelwerk mit Gebrauchsanweisung herausgab (*Primum mobile*, Bologna 1609) und Ph. van Laensbergh (*Triangulorum geometria*, Leiden 1591; vgl. o. S. 96). Bei letzterem erscheint der sphärische Kosinussatz für die Winkel zum erstenmal im Druck. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß er ihn auf einem Umwege von Viète hatte, der ihn, ebenso wie der Astronom Tycho Brahe, um jene Zeit sicher schon besaß.

Im Kreise Brahes, der auf der Insel Hven jene genauen Beobachtungen (noch ohne Fernrohr) machte, die Kepler zur Entdeckung der Planetengesetze führten (s. o. S. 94), wurde auch die prosthaphairetische Methode, die bis dahin noch nicht veröffentlicht worden war (s. o. S. 97), offenbar selbständig wieder entdeckt und angewendet. An

der theoretischen Ausarbeitung beteiligte sich auch Bürgi, der damals zu Cassel als Hofuhrmacher und Mechaniker angestellt war. Nik. Raymarus Ursus (dtsch. Reymers), wie Kepler Hofastronom des Kaisers Rudolf II., brachte die Formeln mit (geometrischem) Beweis zum erstenmal in seinem *Fundamentum astronomicum* (Straßburg 1588) gedruckt heraus. Von da ab bürgerte sich die Methode bei allen Astronomen ein und wurde auch nach der Erfindung der Logarithmen (s. o. S. 88) nicht ohne weiteres aufgegeben.

Daß die 6 Sätze für rechtwinklige sphärische Dreiecke, die schon Viète übersichtlich zusammengestellt hatte, wirklich für alle Fälle ausreichen, sprach zuerst Stevin mit aller Deutlichkeit aus (*Wisc. Gedacht.* 1605/08; s. o. S. 91). Bei ihm finden sich auch die ersten Anfänge einer Polygonometrie, die dann Girard etwas fortführte (1626; s. o. S. 93). Der letztere kam durch Induktion auch zur Aufstellung der Flächenformeln für sphärische Dreiecke (Harriot handschriftlich schon 1603) und Vielecke, die er in der *Invention* von 1629 (s. o. S. 85) und in einem besonderen *Livret* (Amsterdam, ebenf. 1629) veröffentlichte. Daß auch alle Fälle des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks sich auf 6 zurückführen lassen (Rhaeticus hatte noch 28 unterschieden), betonte besonders A. van Roomen (*Canon triangulorum*, Mainz 1609). Der letztere löste die 6 Fälle mit dem Sinussatz, den beiden Kosinus- und Kotangentensätzen. Bei van Roomen und Girard finden sich auch Anläufe, die immer noch mit Worten ausgesprochenen Sätze formelmäßig abzukürzen.

Das Werk des Rhaeticus und Otho (s. o. S. 97) ergänzte und verbesserte in vorzüglicher Weise der Schlesier Barth. Pitiscus († 1613 als Oberhofprediger), indem er einerseits nach Erscheinen des *Opus palatinum* einen Abriß der Trigonometrie vom Jahre 1595 zu einem umfassenden

systematischen Lehrbuch erweiterte, das zum erstenmal 1600 in Frankfurt a. M. aufgelegt wurde. Er verbesserte darin vor allem die Vièt esche Methode des Übergangs zu den polaren Formeln wesentlich und brachte auch sonst viele Neuerungen in der Darstellung. Das Wort „Trigonometrie" stammt von ihm. Andrerseits arbeitete Pitiscus das Tafelwerk des Rhaeticus so um, daß sein eigener *Thesaurus mathematicus* (Frankfurt 1613) von da ab die zuverlässigste Quelle zur Berechnung ähnlicher Tafeln wurde.

Auch der schon öfter erwähnte Niederländer Snellius hat ein sehr bemerkenswertes Lehrbuch der Trigonometrie geschrieben, das ein Jahr nach seinem Tode herauskam (*Doctrina triangulorum canonica*, Leiden 1627). An Übersichtlichkeit kann sich Snellius wohl mit Pitiscus nicht messen. Aber er gab eine Reihe nützlicher Formeln an, die geeignet waren, die Berechnung der Funktionen außerordentlich abzukürzen. Das Polardreieck wird bei ihm ausdrücklich definiert, und während der Kosinussatz für die Winkel zuerst bei Pitiscus bewiesen erscheint, liefert Snellius einen Beweis für den Kotangentensatz. Unter den Anwendungen in der Ebene sei die sog. Hansensche Aufgabe hervorgehoben (geg. Standlinie $AB$ und die Winkel nach zwei Punkten $C$, $D$), die Snellius lange vor Hansen (Astronom, Gotha; 1851) für alle Lagenverhältnisse vollständig durchführte. Auch die sog. Pothenotsche Aufgabe (1692; gedr. Paris Ak. 1730) war bereits von Snellius gelöst worden in seinem dritten Hauptwerk, dem schon 1617 zu Leiden erschienenen *Eratosthenes Batavus*, worin er die Ergebnisse der ersten mittels Triangulation (s. o. S. 97) ausgeführten Gradmessung bekanntgab.

Unterdessen waren, wie wir wissen, die Logarithmen erfunden worden, und Napier gab in seiner *Descriptio* (1614; s. o. S. 88) die Logarithmen von Sinus, vom Sinus des Komplements (die Abkürzung „Co-sinus" stammt von

E. Gunter, s. u. S. 103)[1]), und dazwischen die „Differenz" d. i. log tg. Diese Anordnung wurde bald verbessert, so daß man alle 6 Funktionen bequem aufschlagen konnte. Die Hauptsache war aber, daß Napier die früher, sei es in Worten oder in beginnender Formelschreibung, immer nur in antiker Proportionsform gegebenen Sätze durch logarithmische Gleichungen ersetzte. Beim ebenen rechtwinkligen Dreieck, bei den Sinussätzen und beim Finckschen Tangentensatz (s. o. S. 99) war das sehr einfach. Den ebenen Kosinussatz umging er aber durch Logarithmierung des Satzes $(b+c)(b-c) = (p+q)(p-q)$, wo $p, q$ die durch die Höhe auf der Strecke $a = p + q$ gemachten Abschnitte bedeuten. Den sphärischen Kosinussatz umging er ebenso durch $\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{tg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}$. Außerdem stellte er die Formeln für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ aus den drei Seiten beim sphärischen Dreieck auf. Die beiden ersten sog. Napierschen Analogien (griech.; d. i. Proportionen) stehen erst in der *Constructio* von 1619, und die zwei polaren wurden von Briggs hinzugefügt. Wir deuteten schon an, daß Napier durch Ergänzung der Torporleyschen Figur für das rechtwinklige sphärische Dreieck und bessere Fassung der Regeln diesen die heutige Form gab. Die Halbwinkelformeln für das ebene Dreieck hat Napier noch nicht. Sie waren schon bei Rhaeticus (1596; s. o. S. 97) im Groben vorhanden, Briggs nahm sie in gewisser Form auf; aber als eigentliche Formeln finden sie sich erst in Gellibrands *Trigonometria britannica* (1633).

Briggs selbst († 1630) kam nicht mehr dazu, seine sehr weit gediehenen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln

[1]) Das Wort „sinus" hatte schon Gerhard von Cremona (s. o. S. 61) als richtige Übersetzung (Halsausschnitt, übertr. Busen) des arabisch falsch gelesenen indischen Fremdwortes für „Sehne" eingeführt.

zu veröffentlichen. Edm. Gunter, der auch als Erfinder einer logarithmischen Rechenskala bekannt ist, war ihm auf jeden Fall schon 1620 mit einer kleineren Tafel auf Briggsscher Grundlage zuvorgekommen, und Vlacq (s. o. S. 88) hatte Zahlen- und trigonometrische Logarithmen zur Basis 10 im Jahre 1628 vereinigt herausgegeben. In deutscher Sprache lehrte die logarithmische Behandlung der Trigonometrie (nach Briggs) zuerst Joh. Faulhaber in seiner *Ingenieursschul* (1630; s. o. S. 93). Nach Italien brachte die Briggsschen Logarithmen der Jesuat (nicht Jesuit!) Bonaventura Cavalieri, ein Schüler Galileis. Sein *Directorium generale uranometricum* (Bologna 1632) enthält auch außerdem manches Neue, namentlich einen Beweis für die von ihm selbständig (s. o. S. 100) entdeckte Flächenformel für das sphärische Dreieck. In einem *Compendio delle regole de' triangoli* (Bol. 1638) hat Cavalieri, von dem wir noch sprechen werden (s. u. S. 104) auch die sogen. Additionslogarithmen auf trigonometrische Weise behandelt und die quadratische Gleichung trigonometrisch gelöst. Indem wir hinzufügen, daß in Frankreich die logarithmische Trigonometrie durch einen Nachdruck von Napiers beiden Werken im Jahre 1620 eingeführt wurde, beendigen wir vorläufig den Bericht über die Entwicklung der älteren Mathematik, um uns den unterdessen aufgekommenen neuen Ideen zuzuwenden.

## 2. Die Geburt der neueren Mathematik.

### A. Die Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung.

Wie die moderne Infinitesimalrechnung zweigeteilt ist, ist auch ihr Ursprung ein zweifacher. Die Integralrechnung knüpft unmittelbar an die Inhalts- und Schwerpunktsbestimmungen des Archimedes (s. o. S. 23) an, während die Differentialrechnung von Maximalaufgaben und den

damit zusammenhängenden Tangentenproblemen ihren Ursprung nahm. Auch in dieser Hinsicht hatte Archimedes schon, wenn auch in geringerem Maße, vorgearbeitet. Schwerpunktsberechnungen mit jedesmal eigens geführtem Exhaustionsbeweis (s. o. S. 14) nahm in Nachfolge Maurolicos (s. o. S. 90) besonders fein, auch für Scheiben von Rotationskörpern 2. Ordg., der römische Professor Luca Valerio im Jahre 1604 vor. Aber schon in den statischen Arbeiten Stevins, die zu Leiden unter den Titeln *De Beghinselen der Weeghconst* und *De Begh. des Waterwichts* erschienen (wieder abgedr. in den *Wisc. Ged.*; s. o. S. 91), kommen Betrachtungen vor, die man als Grenzübergänge bezeichnen muß. Ähnliche Grenzübergänge machte auch der niederländische Jesuit Ch. de La Faille 1632 bei Bestimmung des Schwerpunktes von Kreis- und Ellipsenausschnitten. Zur mathematischen Ableitung des Gesetzes vom freien Fall führten sowohl Descartes 1618/19 als auch Galilei (etwas später; veröff. 1632 in den Dialogen über die zwei Weltsysteme) in die Figur der Scholastiker (s. o. S. 66) Teilungslinien nach unendlich kleinen Zeitabschnitten ein.

All diesen einzelnen Versuchen fehlte aber die Methode. Eine solche hatte sich schon Kepler, veranlaßt durch die Ungenauigkeit der Visierbücher (s. o. S. 70), als er zu Linz Gymnasialprofessor war und der Sommer 1612 viel Wein brachte, zurechtgelegt und in der *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Linz 1615; deutsch 1616) veröffentlicht. Den größten Fortschritt machte aber Cavalieri, der uns bereits bekannte Schüler Galileis (s. o. S. 103), indem er die nun schon im Schwang befindlichen Verfahren in ein neues System brachte, das wie eine unmittelbare, freilich sehr breite und wenig exakte Fortsetzung von Archimedes' Methodenlehre (s. o. S. 23) aussieht. Er gab sein Werk über die „Geometrie der Indivisibeln“, deren

Grundlagen er schon 1622 besaß, 1635 zu Bologna heraus. Den Indivisibelbegriff konnte er der scholastischen Lehre vom Kontinuum (s. o. S. 66) entnehmen; aber es erscheint kaum zweifelhaft (s. o. S. 72), daß die Archimedische Methode selbst, wenn auch der Brief an Eratosthenes verloren war, in irgendwelchen Kanälen das Mittelalter überdauert hatte und jetzt wieder ans Tageslicht trat. Es gelang Cavalieri, den Satz, den wir $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$ schreiben, auf höhere Exponenten auszudehnen. Darin war er freilich schon von Ibn Alhaiṯam (s. o. S. 53) und Fermat (s. u. S. 107) überholt worden. Der letztere sprach den Satz (1629) gleich für allgemeine ganze (später auch für gebrochene und negative) Exponenten aus. Auf Angriffe des Schweizer Jesuiten Paul Guldin (*Centrobaryca*, Wien 1635/41) hin und infolge verschiedener Paradoxe, die Torricelli (s. u. S. 107) mittels der Indivisibeln abgeleitet hatte, stellte Cavalieri seine Methode in den *Exercitationes geometricae* (Bologna 1647) etwas deutlicher dar. Daß der von Guldin entdeckte und nach ihm benannte Satz sich schon bei Pappos findet, scheint man damals nicht bemerkt zu haben.

Unabhängig von Cavalieri haben zur selben Zeit auch andere Mathematiker ähnliche Methoden zur Flächen- und Volumenbestimmung ausgearbeitet. So zeichnet sich das umfangreiche *Opus geometricum* (in der Hauptsache fertig 1625; ersch. Antwerpen 1647) des niederländischen Jesuiten Gregorius a St. Vincentio durch große Mannigfaltigkeit der Verfahren aus. Das Werk ist freilich in der Hauptsache einer vermeintlich genauen Kreisquadratur gewidmet, enthält aber auch eine gute, ausführliche Kegelschnittlehre. Von Cavalieri abhängig ist aber bereits der Professor am Collège de France Giles Personne, gen. Roberval (nach seinem Geburtsort), der wie Descartes neue Anwendungen

machte (um 1637). Besonders scharf erfaßte die Methode Cavalieris der berühmte Jesuitengegner, im Jahre 1662 als Asket gestorbene Blaise Pascal (1654 und 1657). Er kam dem Begriff des bestimmten Integrals sehr nahe, drückte aber alles umständlich in Worten aus. Gregorius wandte auch den Grenzübergang mit großer Folgerichtigkeit an. Darin folgte ihm sein Ordensgenosse und Landsmann Andreas Tacquet, schon in seinen *Cylindrica et annularia* (Antw. 1651) bei Körpern und in seiner „Geometrie" (ebd. 1654; öfter) bei der geometrischen Reihe. Dabei tritt allmählich eine immer stärkere Arithmetisierung ein, die man bei John Wallis als völlig vollzogen ansehen darf. Dieser mit großer Kombinationsgabe ausgerüstete Gelehrte (s. o. S. 93), Hofkaplan und Professor in Oxford, gab schon in seinem *Tractatus de sectionibus conicis* (Oxford 1655; s. u. S. 118), besonders aber in der *Arithmetica infinitorum* des Jahres 1656 glänzende Anwendungen der leicht veränderten Indivisibeln. U. a. kam er dadurch auf das unendliche Produkt $\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}$, das Brouncker in einen unendlichen Kettenbruch verwandelte. James Gregory definierte in der schon angeführten Schrift über die Kreisquadratur (1667; s. o. S. 96) scharf den Begriff der Grenze und ergänzte in seinen *Exercitationes geometricae* (London 1668) die schon von Roberval und besonders von Pascal angegebenen trigonometrischen Integrale durch $\int \mathrm{tg}\, x\, dx$ und $\int \sec x\, dx$, welch letzteres schon in der Nautik angenähert ausgewertet worden war (E. Wright, *Certain errors in navigation*, London 1599). Gregory stellte auch, indem er eine allgemeine Kurve angenähert durch eine Parabel höherer Ordnung ersetzte, die sog. Simpsonsche Regel dem Wesen nach auf.

Die Tangenten an Kreis und Kegelschnitte hatte das Altertum in elementarer Weise bestimmt. Nur bei der

Spirale hatte Archimedes ein Differentialverfahren anwenden müssen. Die Beschäftigung mit verschiedenen neuen Kurven nötigte aber im Eingang des 17. Jahrhunderts die Mathematiker, auch diesem Punkte ihr Augenmerk zuzuwenden. Ein allgemeines Verfahren, eine wagrechte Tangente und damit zugleich das Maximum oder Minimum der vorliegenden Funktion, wie wir sagen, zu bestimmen. erdachte zuerst Pierre de Fermat, wie Viète staatlich angestellter Richter (zu Toulouse), im Jahre 1629. In die Öffentlichkeit kam es durch Hérigone, der es 1642 seinem *Cours* (s. o. S. 84) beigab. Dieses Verfahren entspricht zwar genau unserer Differentiation, war aber doch damals nur ein Kunstgriff, da Fermat keinen Grenzübergang machte. Fermat, dessen *Varia opera* erst von seinem Sohne herausgegeben wurden (Toulouse 1679), lernte bald die Tangente in einem beliebigen Punkte bestimmen, und indem er hierauf seine Maximalmethode anwandte, fand er auch Wendepunkte. Descartes setzt in seiner *Géométrie* (1637; s. u. S. 116) eine algebraische Tangentenmethode auseinander, entdeckte aber auch den besonders für viele transzendente Kurven wichtigen Satz über die Normale bei Rollkurven (brieflich 1638). Die sog. Robervalsche Tangentenmethode, die auf dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten beruht, entdeckte unabhängig und etwa gleichzeitig auch der durch seine Erfindung des Barometers (1643) berühmte Galileischüler Evangelista Torricelli (veröff. in den *Opera geom.*, Florenz 1644). Torricelli war ferner der erste, der eine Einhüllende (von Wurfparabeln) vollkommen streng bestimmte (1641; veröff. ebd.). Auch der niederländische Domherr René de Sluse besaß schon 1662 eine eigene Tangentenmethode, die 1673 in den Phil. Transactions veröffentlicht wurde.

Die Messung der Länge eines Kurvenbogens, die schon beim Kreis sich als nicht genau möglich herausgestellt

hatte, ergab überraschenderweise bei einzelnen Kurven exakte Resultate. Das erste Beispiel dieser Art gab ebenfalls Torricelli (um 1640) mit der von ihm (und von Descartes gleichzeitig) entdeckten logarithmischen Spirale, dann folgte die Neilsche Parabel ($y^2 = x^3$) durch den Engländer William Neil (1657) und die der Zykloide durch dessen Landsmann, den berühmten Architekten Christopher Wren (1658). Man lernte allgemein jede solche Rektifikation auf die Quadratur einer Fläche zurückzuführen, und besonders Huygens (s. o. S. 96) bestimmte um dieselbe Zeit auch Flächen von Umdrehungskörpern oder führte diese auf einfache Quadraturen (Integrationen) zurück (veröff. erst in dem bedeutenden Werk über die Pendeluhr *Horologium oscillatorium*, Leiden 1673, verf. 1665).

Gerade bei Betrachtungen dieser Art war öfter schon das „charakteristische" Dreieck aus $dx$, $dy$, $ds$, wie es Leibniz später bezeichnete (s. u. S. 112), aufgetreten (Wallis 1655, Pascal 1659). Aber der Gedanke, daß Quadratur und Tangentenbestimmung zueinander umgekehrte Verfahren sind, tauchte doch mit Bestimmtheit erst bei Isaak Barrow, Professor d. Math. in Cambridge (*Lectiones geometricae*, London 1670) auf, der an die mechanischen Vorstellungen von Torricelli anknüpfte. Damit konnte man dann auch Aufgaben, in denen aus gegebenen Tangenteneigenschaften die Kurve bestimmt werden sollte (sog. inverse Tangentenaufgaben), auf Quadraturen zurückführen. Aber es fehlte noch die Zusammenfassung all der großen Fortschritte zu einem Rechenverfahren.

Als für sich stehend, aber gleichwohl wichtig und zur Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung gehörend, weil es sich um die erste exakte Behandlung eines unendlichen Prozesses handelt, muß die Erfindung der Kettenbrüche

durch den Vorgänger Cavalieris auf dem Lehrstuhl von Bologna, Pietro Ant. Cataldi hier erwähnt werden. Wohl beschränkte sich Cataldi nur auf die Kettenbruchdarstellung der Quadratwurzelziehung; aber an diesem Beispiel hat er in einem umfangreichen *Trattato* (Bologna 1613; verf. 1597) alle Hauptsätze streng entwickelt. Vor ihm tritt nur ein einziges Beispiel derselben Art (aber noch ohne Kettenbruchsymbolik) in der *Algebra* seines engeren Landsmanns Bombelli (1572; s. o. S. 81) auf. Auch die Ersetzung eines Bruches in großen Zahlen durch kleinere Näherungsbrüche nach dem Verfahren der Euklidschen Kettendivision war nach D. Schwenter damals bei den Rechenmeistern schon in Übung, wie er in seiner *Geom. practica* (2. Traktat 1617 o. 18; s. o. S. 93) mitteilt.

**B. Die Erfindung der Differential- und Integralrechnung.**

Die Quadraturen der damaligen Zeit führten oft auf Logarithmen, zyklometrische u. a. Funktionen, die man nicht wie heute als bekannt ansah und anschrieb. Hier traten als wichtiges Hilfsmittel die Potenzreihen ein, die man gliedweise integrieren konnte. Wir sahen ja schon in der Scholastik gelegentlich unendliche Reihen auftauchen (s. o. S. 67). Systematisch hat aber erst Pietro Mengoli, ein Schüler Cataldis, (*Novae quadraturae arithmeticae*, Bol. 1650) gewisse Arten von Reihen untersucht. Er bewies zum erstenmal streng die Divergenz der harmonischen Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ und bestimmte die Summe der unendlichen Reihe der reziproken Dreieckszahlen, sowie mehrerer anderer daraus abgeleiteter Reihen. In der *Geometria speciosa* (Bol. 1659) stellte er sogar logarithmische Reihen in gewisser Form auf. Seine Bücher scheinen allerdings, wohl wegen der durch den Mangel aller Symbolik sehr schwierigen Darstellung, keinen Einfluß ausgeübt zu haben.

Anders war es mit der logarithmischen Reihe $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$, die Nik. Mercator, ein Holsteiner, in seiner *Logarithmotechnia* (London 1668) an Zahlenbeispielen aus der Hyperbelquadratur gewonnen hatte. Mercators Methode faßte Fuß. Gleichzeitig hatte nämlich Lord Will. Brouncker eine ähnliche Quadratur vollzogen und besonders Isaac Newton, Barrows Schüler, entwickelte ganz grundsätzlich Funktionen in Reihen. Newton war wohl noch etwas früher auf die Reihen für $e^x$, $\sin x$, $\sin\text{vers}\, x (= 1 - \cos x)$ und $\arcsin x$, sowie auf die Binomialreihe, sogar für allgemein gebrochene Exponenten, gekommen, die dann alle zum erstenmal Wallis in seinem *Treatise of Algebra* (London 1685; verf. 1676) veröffentlichte. Die Reihe für $\text{arc tg}\, x$ fügte J. Gregory (s. o. S. 106) 1671 zu den ihm bekannt gewordenen Newtonschen. Zusammengefaßt erschienen Newtons Entdeckungen, zu denen auch die Reihenumkehrung gehörte, erschienen erst 1711 zu London in der Schrift *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Aber auf die großen Newtonschen Erfolge hin überließ Barrow schon 1669 freiwillig Newton seinen Lehrstuhl.

Diese Erfolge bestanden nicht nur in den neuen Reihenentwicklungen. Durch mündlichen Verkehr im Besitz der Barrowschen Kenntnisse (s. o. S. 108), war Newton schon im Jahre 1665 das reziproke Verhältnis des Differentialquotienten, den er „Fluxion" nannte, und des Integrals („Fluente") völlig klar geworden und er hatte für sich bereits die Fluxionsbezeichnung $\dot{x}$ ($= dx/dt$; $t$ die Zeit) eingeführt. Um 1670/71 faßte er sein System der Differential- und Integralrechnung in einer großen Abhandlung *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* zusammen, die allerdings zu seinen Lebzeiten (er starb 1727 als hoher Staatsbeamter) nie erschien, aber doch durch seinen Freundeskreis nicht ganz unbekannt blieb. Newton

differenzierte und integrierte nicht nur explizite Funktionen, sondern stellte auch aus gegebenen Gleichungen in mehreren Veränderlichen die Differentialgleichungen her, ja er suchte auch aus letzteren die ersteren zu rekonstruieren, wobei er, wenn es nicht anders ging, wieder zu Reihenentwicklungen griff. Daß bei mehreren Veränderlichen dann willkürliche Funktionen eingeführt werden müssen, war ihm schon klar. In der 1736 (zunächst englisch) veröffentlichten Form der *Methodus fluxionum* finden sich auch alle Anwendungen, die wir heute gewohnt sind von der Infinitesimalrechnung zu machen, neben den schon in der Vorgeschichte erwähnten, vor allem die Bestimmung des Krümmungsradius einer ebenen Kurve. Newton hat dies aber wohl erst nach und nach seinem ursprünglichen Entwurf beigefügt, vielleicht angeregt durch Huygens' Werk über die Pendeluhr (1673; s. o. S. 108), der dort schon Evoluten und Evolventen (darunter das berühmte Zykloidenpendel), wenn auch nach der alten Methode, behandelt hatte.

Newton selbst schickte erst 1687 seinem unsterblichen Werke über die theoretische Physik *Philosophiae naturalis principia mathematica* 11 Lehrsätze voraus, in denen seine Methode wenigstens angedeutet war. Die *Principia* selbst schrieb er noch im alten Stil. Die sog. Newtonsche Interpolationsformel tritt hier, mit 5 anderen, zum erstenmal auf (Beweis in der *Methodus differentialis*, 1711). Auch hat Newton in den *Principia* die erste Variationsaufgabe gelöst, indem er den Rotationskörper kleinsten Widerstandes bestimmte. Verständlich dargestellt kam die Fluxionsrechnung heraus durch zwei Briefe, die Newton auf Wallis' Bitte 1692 geschrieben hatte und die dieser im zweiten Band seiner *Opera* (Oxford 1693) der lateinischen Übersetzung der *Algebra* (s. o. S. 666) beigab. Eine andere kurze Darstellung fügte Newton

selbst unter dem Titel *Tractatus de quadratura curvarum* 1704 seiner grundlegenden Optik als Anhang bei. In dieser Schrift, wie schon in den Briefen an Wallis hatte Newton auch höhere Fluxionen eingeführt.

Neben Newton hat auch der Leipziger Gottfr. Wilh. Leibniz, der einzige bedeutende Gelehrte des 17. Jahrhunderts in dem durch den 30jährigen Krieg verwüsteten Deutschland, die Differential- und Integralrechnung, wenn auch etwas später, selbst erfunden und seine Auffassungs- und Schreibweise hat sich infolge ihrer größeren Geschmeidigkeit (endgültig im 19. Jahrhundert) die Welt erobert. Leibniz, als Jurist ausgebildet, war in der Mathematik völliger Autodidakt. Er hätte auch an keiner deutschen Universität sich mehr als die allerersten Grundbegriffe erwerben können. So studierte er Cavalieri, Descartes (s. u. S. 116) und Pascal (s. o. S. 108), Gregorius (s. o. S. 105), Mercators *Logarithmotechnia* und Huygens' *Horologium*. Nach seiner eigenen Angabe hat ihn Pascal am meisten beeinflußt. Auf jeden Fall kannte er 1673 das gegenseitige Entsprechen von Differentiation und Integration. Schon 1675 schrieb er statt des früher gebräuchlichen „Omn.(ia) $l$" (d. h. „alle $l$", wo $l$ ein Indivisibel ist) zuerst $\int l$ und bald darauf $\int l dx$. 1674 hatte er (ohne Kenntnis von Gregorys arctg-Reihe) die Reihe $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ mittels einer Quadratur aufgestellt. 1676 schrieb Newton an Leibniz zwei Briefe, die zwar die Methode der Fluxionsrechnung nicht enthielten, doch aber durch mehrere mitgeteilte Ergebnisse in bezug auf Integration und Reihenlehre den schon selbst weit vorgeschrittenen Leibniz anregen konnten. Auch nahm Leibniz im selben Jahre vielleicht in Newtons *Analysis per aequationes* zu London Einsicht. Die darin vorkommenden Reihen, mit Ausnahme der Binomialreihe, hatte Leibniz aber selbst schon auf anderem Wege gefunden.

In jene Zeit fällt die Gründung von gelehrten Gesellschaften und von wissenschaftlichen Zeitschriften. Die Pariser Akademie der Wissenschaften, in ihrer ursprünglichen Form schon 1635 durch den Kardinal Richelieu begründet, hatte 1666 durch Minister Colbert eine Neugestaltung erfahren, mit Huygens als Vorsitzendem. Im Jahre 1665 war das erste Heft des „Journal des Sçavans" erschienen. In demselben Jahre begannen in London die „Philosophical Transactions" der Royal Society zu erscheinen, die im Jahre 1660 an die Öffentlichkeit getreten war (erster Präsident Brouncker). Nach dem Vorbilde des Journ. d. Sç. gab man seit 1682 in Leipzig die „Acta Eruditorum" heraus. Diese letzteren benützte Leibniz, der später selbst der erste Präsident der im Jahre 1700 ins Leben gerufenen Berliner Akademie wurde, um seine Entdeckungen ans Licht zu bringen.

Der erste Aufsatz darüber brachte 1684 den „calculus differentialis" und was damit zusammenhing, vor allem auch gleich die bestimmte Unterscheidung zwischen Maximum und Minimum. Da Leibniz hier von endlichen Differenzen ausging, darf man in der Abhandlung auch die Anfänge der Differenzenrechnung erblicken, soweit deren Grundbegriffe nicht schon bei der Bildung von Logarithmentafeln und bei höheren arithmetischen Reihen (s. o. S. 83) in Anwendung gekommen waren. Weitere Aufsätze folgten, wo u. a. auch der Krümmungskreis und „Oskulationen" höherer Ordnung in Betracht gezogen wurden. Im Jahre 1686 entwickelte Leibniz die Grundgedanken der Integralrechnung und legte den Begriff der transzendenten Kurven fest. Der Jahrgang 1693 brachte die Erledigung des Problems der Einhüllenden (s. o. S. 107), sowie die Integration von Differentialgleichungen durch Reihen mittels unbestimmter Koeffizienten (s. u. S. 124). Im Jahre 1695 stieg Leibniz,

der das alles mitten zwischen seinen ausgedehnten philosophischen historischen und politischen Arbeiten machte, zu $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten auf, wobei er auch an negative $n$ dachte. Daneben liefen verschiedene Anwendungen und Verteidigungen gegen nicht unberechtigte Angriffe von philosophischer Seite (J. d. Sç. 1702).

In den Anwendungen geometrischer und mechanischer Art waren am vielseitigsten und glücklichsten die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (geb. zu Basel 1654 bzw. 1667), die sich in Leibniz' Verfahren als erste einarbeiteten. Schon 1690 schrieb Jakob einen Aufsatz in die Act. Er. und führte dort die Bezeichnung „Integral“ ein. Am Schlusse stellte er das Problem der Kettenlinie, das dann außer von ihm und seinem Bruder auch von Leibniz und Huygens gelöst wurde. Jakob behandelte die logarithmische Spirale (s. o. S. 108) und stellte die Lemniskate, sowie die Elastizitätskurve auf. Johann führte bei Untersuchung von Differentialgleichungen erster Ordnung schon 1694 die „Trennung der Veränderlichen“ durch, löste 1697 das Problem der Trajektorien und lehrte die Behandlung von Exponentialkurven auch höherer Art. Insbesondere sei noch auf das Problem der Kurve schnellsten Falles (Brachistochrone) hingewiesen, das Johann 1696 aufwarf und dessen Lösung (Zykloide) durch Leibniz und Jakob Bernoulli (1697) den eigentlichen Beginn der Variationsrechnung darstellt (s. o. S. 111). Die isoperimetrische Aufgabe, die ebenfalls Jakob bald darauf (1700/01), wenn auch umständlich erledigte, trägt denselben Charakter. Außerdem gab Jakob zu Basel 1689—1704 fünf große Dissertationen über Reihenlehre heraus, während Johann 1691/92 umfangreiche Lektionen über Integralrechnung schrieb (veröff. erst 1742 in den *Opera*). Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Anwen-

dung auf Kurven gab, stark beeinflußt durch Joh. Bernoulli, der Marquis Guillaume François de L'Hospital unter dem Titel *Analyse des infiniment petits* heraus (1. Aufl. Paris 1696).

In seinem Aufsatz von 1686 hatte Leibniz auf die Selbständigkeit der Entdeckungen Newtons hingewiesen, und Newton billigte Leibniz dasselbe zu in einer Fußnote seiner *Principia* (1687). Später aber entstand ein Streit um die Priorität der Erfindung, der über den Tod der beiden Gelehrten hinaus (Leibniz starb im Jahre 1716) von den beiderseitigen Anhängern unter Mißverständnissen und mit Vorurteilen geführt wurde.

### C. Die Entstehung der analytischen Geometrie.

All die im vorstehenden geschilderten Fortschritte wären auch in ihren Anfängen nicht möglich gewesen ohne eine gewisse Form des Koordinatenbegriffes. Aber dieser selbst war eigentlich an sich gar nichts Neues. Die Kegelschnitte bezog man ja seit dem Altertum meist auf eine Achse. Dann waren ihre Punkte durch die Abstände von dieser Achse und die Entfernung der Fußpunkte von einem Scheitel festgelegt. Die Beziehungen zwischen diesen Strecken hatte man schon seit Archimedes geradezu zur Definition der Kegelschnitte benutzt. Insbesondere entsprechen unsere heutigen Scheitelgleichungen genau den sog. Flächenanlegungsaufgaben (s. o. S. 19). Man brauchte also nur, was etwa Apollonios (s. o. S. 25) in Worten und mit Proportionen ausgedrückt hatte, in Buchstaben und Gleichungen zu übertragen, so hatte man schon eine Art analytischer Geometrie.

Was hier fehlte, um dieser die Beweglichkeit zu geben, die sie heute besitzt, war die Verlegung der Achse in eine beliebige Gerade der Ebene und die Wahl eines beliebigen Anfangspunktes auf dieser Achse zur Zählung der Ab-

szissen. Diesen Schritt taten, sicher voneinander unabhängig und fast gleichzeitig, angeregt durch eingehende Beschäftigung mit der alten Geometrie, zwei Franzosen, die uns schon gelegentlich begegnet sind, Pierre de Fermat und René Descartes. Um 1637 wurde Fermats Abhandlung *Ad locos planos et solidos isagoge* dem Pariser Mathematikerkreis bereits bekannt, wenn sie auch erst 1679 (s. o. S. 107) veröffentlicht wurde. Dort sind schon die Grundgleichungen der Geraden und der Kegelschnitte, freilich noch in der Vièteschen algebraischen Form, enthalten. Descartes' *La Géométrie* war einer der Anhänge zu seinem berühmten *Discours de la méthode*, der in gewissem Sinne die neuere Philosophie einleitet. Gleichzeitig mit einer Dioptrik und einer Meteorologie sollte die Geometrie Proben der neuen Art zu denken geben. Das Ganze erschien zu Leiden im Jahre 1637. Descartes ging von einem ziemlich schwierigen geometrischen Ort aus, den er Pappos entnahm und zeigte daran, wie derartige Fragen mittels der neuen Algebra behandelt werden könnten. Im zweiten Buch dienen seine (für die Optik wichtigen) Ovale als Beispiel, für die er eine Parameterdarstellung angibt.

Wiewohl eigentlich Fermats Abhandlung systematischer angelegt war und dem damaligen Wissensstand auch in der Form näher kam, knüpfte doch die Entwicklung, zum größten Teil wohl wegen der früheren Veröffentlichung, an Descartes' Darstellung an, die nicht nur durch ihre moderne algebraische Ausdrucksweise Schwierigkeiten machte, sondern auch noch absichtlich dunkel gehalten war. Descartes hatte seine Algebra auf der Jesuitenschule aus der stark von Stifel beeinflußten cossistisch gehaltenen *Algebra* von Clavius (1. Aufl. Rom 1608) gelernt, dann aber sich mehr an Harriot und Hérigone (s. o. S. 86) angelehnt, so daß seine Schreibweise, be-

sonders da er $a, b, c, \ldots$ als die bekannten, $z, y, x, \ldots$ als die unbekannten Größen einführte, sich wenig von der heutigen unterscheidet. Schon im 3. Buch seiner Geometrie ist das $x$ etwas bevorzugt, und bei seinen Nachfolgern erhielt es allmählich den Vorrang als Unbekannte. Die starke Algebraisierung machte sich aber bei Descartes noch in einem wesentlichen Umstand geltend. Fermat hatte noch wie das ganze Altertum und die Araber streng an der Homogenität der Gleichungen festgehalten. Diese vernichtete Descartes vollkommen, indem er gleich zu Anfang eine Einheitsstrecke einführte, mittels deren er auch Ausdrücke wie $ab$, $a/b$, $a^3$ usw. durch Strecken darzustellen lehrte. So nur war es möglich, daß er als Koeffizienten einer Gleichung in $x$, $y$ auch Zahlen nehmen konnte.

Descartes lebte selbst lange Zeit zurückgezogen in Holland. Dort erstand ihm auch in Frans van Schooten (s. o. S. 94), der an der Universität Leiden Mathemathik lehrte, der eifrigste Vertreter. Nicht nur, daß er die *Géométrie* ins Lateinische übersetzte (1. Ausg. Amsterdam 1649), sondern er schrieb auch Erläuterungen dazu und hielt einleitende Vorlesungen darüber, die der zweiten lateinischen Ausgabe (Amst. 1659/61) beigegeben wurden. Schon die Ausgabe von 1649 enthielt außer den Schootenschen Ergänzungen solche von Florimond Debeaune, einem in der Mathematik sehr geschickten Juristen. In der zweiten Fassung von 1659 bringt Schooten auch Formeln für die Transformation rechtwinkliger Koordinaten. Sonst waren weder bei Fermat noch bei Descartes die Koordinaten ausgesprochen rechtwinklig, da viele der Kegelschnitteigenschaften, die zunächst in algebraische Form gebracht wurden, schon von den Alten allgemein für konjugierte Richtungen ausgesprochen worden waren. Auch in seinen *Exercitationes math.* (Leiden

1656/57) hat Schooten die neue Methode an verschiedenen Stellen verwendet.

Unterdessen hatte auch Wallis die Sache erfaßt und selbst eine Kegelschnittlehre im neuen Stile geschrieben, die wir wegen der Anwendung des Infinitesimalen schon erwähnt haben (s. o. S. 106). Vor allem wichtig ist aber noch eine Schrift des holländischen Staatsmannes Jan de Witt *Elementa curvarum linearum*, die der zweiten Ausgabe der *Geometria* von Descartes (1659) beigefügt wurde. De Witt geht von kinematischen Erzeugungen der Kurven 2. Ordg. aus und beweist, daß dabei die Schnitte des Kegels herauskommen. Auch zeigt er, daß jeder solche Kegelschnitt ein Paar rechtwinklige Achsen hat. Damit machte er einen Schritt zur Befreiung der analytischen Geometrie von räumlichen Betrachtungen am Kegel. Recht gut ist auch ein Büchlein *Nouveaux élémens des sections coniques* von Philippe de La Hire, das sich ausdrücklich als Verbesserung der de Wittschen Arbeit ausgibt. Ein Buch des Schotten J. Craig *Tractatus de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geom.* (London 1693) erwähnen wir wegen einer eigenartigen Behandlung der Gleichungen der Kegelschnitte bei ganz allgemeiner Lage gegen das Koordinatensystem.

Dieses „Koordinatensystem" hatte aber immer noch arge Mängel gegenüber dem unserigen, die einerseits auf dem Fehlen einer Ordinatenachse, andererseits auf der mangelhaften Berücksichtigung negativer Koordinaten, besonders negativer Abszissen beruhten. So wurden in der Regel nur Stücke der Kurven betrachtet. Bei den Kegelschnitten wußte man ja, wie sie aussahen. Aber bei höheren Kurven, auf die man nun die analytische Geometrie auch anzuwenden begann, wurden öfters Fehler begangen. Schon Descartes faßte in seiner *Géométrie* höhere algebraische Kurven, die er „geometrische"

nannte, ins Auge und gab einige Beispiele solcher. In der Einteilung griff er aber noch fehl. Die „mechanischen" (d. h. transzendenten) Kurven wollte er gerne aus der Mathematik ausschließen. Aber sie drängten sich in den Anwendungen überall auf (Zykloide, Kettenlinie usw.), und Leibniz trat nachdrücklich für sie ein, indem er betonte (1686), daß sein Kalkül gleichmäßig auch auf sie anwendbar sei. Die Gleichungen solcher Kurven wurden freilich immer noch nicht angeschrieben, sondern nur in Differentialform gegeben, da man (vgl. o. S. 109) mit transzendenten Funktionen erst vom Anfang des 18. Jahrhunderts an algebraisch rechnen lernte. Ähnlich war es mit Kurven in Polarkoordinaten (Spiralen).

Die Einführung der Koordinaten in die algebraische Behandlung der Geometrie hatte sofort auch die Wiederaufnahme des Verfahrens der graphischen Lösung von Gleichungen, die wir bei den Griechen in Beispielen (s. o. S. 29) und bei ʿOmar Alḫajjām in einer gewissen Vollendung sahen, zur Folge. Fermat und Descartes waren es selbst, die mit großem Geschick die ersten Lösungen gaben. Beide zogen auch aus der algebraischen Behandlung schon den Schluß, daß Aufgaben mehrerer mittleren Proportionalen, Dreiteilung des Winkels u. ä. nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar seien. Sie nahmen Kurven möglichst niedriger Ordnung (meist Kreise und Parabeln) zur Konstruktion. Aber schon Barrow (1670; s. o. S. 108), dann Jak. Bernoulli (1695 in Anmerkungen zur 4. lat. Ausgabe von Descartes' *Geometria*) u. a. nahmen die höhere Parabel, die durch das Gleichungspolynom gegeben wird, zu Hilfe. Am weiteren Ausbau dieser Methode haben dann so ziemlich alle Mathematiker, die über Algebra oder über „Örter" schrieben, bis zur Mitte des 18. Jahrh. teilgenommen.

Die Ausdehnung des Koordinatenbegriffes auf den Raum muß nicht so nahe gelegen haben als es uns scheinen

mag. Descartes wenigstens kam kaum darauf, und bei Fermat findet sich nur eine Andeutung in einem späteren Aufsatz. Zum erstenmal tritt die Anfügung einer dritten Koordinate in La Hires *Nouv. élémens* (1679; s. o. S. 118) auf, wo ganz gelegentlich eine Fläche zweiter Ordnung durch eine Gleichung in $x$, $y$, $v$ dargestellt, aber nicht weiter untersucht wird. Jedoch muß gegen das Ende des 17. Jahrhunderts auch Joh. Bernoulli im Besitz dieser Idee gewesen sein. Denn er erklärte Leibniz in einem Briefe (1697), daß er das Problem der geodätischen Linien auf eine Differentialgleichung zurückgeführt habe. Das hätte er ohne Raumkoordinaten nicht tun können. Rein zahlenmäßig hat schon Girard Desargues in seiner Perspektive von 1636 (s. u. S. 121) einen Punkt durch drei Koordinaten festgelegt.

Trotz dieses Mangels machte doch auch die Theorie der Flächen in unserem Zeitraum Fortschritte. Man schnitt sie mit Ebenen, in denen man dann zwei Koordinaten anwenden konnte. Fermat gab dazu in einer Abhandlung von 1643 *Isagoge ad locos ad superficiem* freilich nur Gesichtspunkte. Er stellte sich aber die Aufgabe offenbar leichter vor als sie ist, und es fehlen sogar in seiner Aufzählung die meisten allgemeinen Flächen 2. Ordg. Das einschalige Rotationshyperboloid hatte allerdings schon Cavalieri (1635; s. o. S. 104) betrachtet (das zweischalige bereits Archimedes). Wallis bestimmte in seiner Schrift über die Kegelschnitte (1655; s. o. S. 118) die Rauminhalte von Ellipsoiden, elliptischen Paraboloiden und zweischaligen Hyperboloiden allgemeiner Art. In der *Mechanica* (II, 1670) bemerkte er auf dem einschaligen Rotationshyperboloid auch die Geraden und die parabolischen Schnitte. Einem besonderen „Körper", den er Cono-Cuneus (= Kegelkeil) nannte, widmete er 1684 eine analytische Abhandlung, in der er dem Be-

griffe der Raumkoordinaten recht nahe kam (Anhang zur *Algebra* von 1685; s. o. S. 110). Auch Schooten untersuchte in seinem Kommentar zu Descartes einige Flächen mittels zwei Koordinaten. Zu dem Begriff einer „Fläche“ als eines zweidimensionalen Gebildes kam man aber überhaupt allgemein nicht vor der Mitte des 18. Jahrhunderts. Es wurden, auch als man lernte die Gleichungen aufzustellen, meist nur Stücke betrachtet und diese wie im Altertum als „Körper“ aufgefaßt.

### D. Die Anfänge der projektiven Geometrie.

Auch die reine Geometrie machte um dieselbe Zeit einen gewaltigen Ruck nach vorwärts. Der Architekt Girard Desargues aus Lyon (s. o. S. 120) war es, der von der malerischen Perspektive ausgehend, die Zentralprojektion systematisch auch auf die geometrischen Gebilde, insbesondere die Kegelschnitte, anwandte und so den Grund legte für einen neuen mathematischen Wissenszweig, den man später „projektive Geometrie“ nannte. Während aber Infinitesimalrechnung und analytische Geometrie sich in ununterbrochener Entwicklung erhielten, blieb die projektive Geometrie in den ersten Anfängen stecken, ja Desargues wurde vergessen, und sein Hauptwerk tauchte erst im Jahre 1845, nachdem die projektive Geometrie von neuem entdeckt und zu hoher Blüte gebracht worden war (s. d. 2. Bdch.), bei einem Antiquar in einer von La Hire 1679 gefertigten Abschrift wieder auf. Unterdessen ist die projektive Geometrie, durch die Entwicklung der mathematischen Mode, schon wieder fast historisch geworden.

Die geometrischen Absichten Desargues' traten bereits in seiner kurzen Perspektive (Paris 1636), die in einem Anhang den nach ihm benannten Satz über perspektive Dreiecke enthielt, so stark hervor, daß ein erbitterter

Kampf mit den Praktikern die Folge war. Desargues hatte, wie es scheint, nur einen Anhänger gefunden, den Kupferstecher Abraham Bosse, der auch in seinen eigenen Schriften die Lehre Desargues' vertrat, aber den Gegnern sogar seinen Lehrstuhl an der Akademie der Künste zum Opfer bringen mußte. In seinem „Entwurf (*Brouillon proiect*) eines Versuchs über die Vorkommnisse beim Schnitt eines Kegels mit einer Ebene“ (Paris 1636), von dem kein gedrucktes Exemplar mehr bekannt ist, machte er die Zentralprojektion zur Grundlage der ganzen Betrachtung. Er führt die unendlich fernen Elemente und den Begriff der Involution ein, für Punkte und Strahlen, läßt die Kegelschnitte ineinander übergehen, stellt die Sätze über Pol und Polare für den Kreis auf und überträgt sie in der allgemeinsten Weise auf Kegelschnitte. Zahlreiche Einzelsätze waren die Folge dieser allgemeinen Betrachtungen.

In der Form war diese Schrift ungeordnet, und sie stieß auch durch die vielen neu eingeführten Bezeichnungen ab. So fand sie zwar das Lob von Fermat und Descartes; aber diese Männer waren zu sehr von ihren eigenen Untersuchungen in Anspruch genommen, als daß sie auf die neue Betrachtungsweise eingegangen wären. Nur der junge Pascal (s. o. S. 106) erfaßte die Desarguesschen Ideen und er begann schon mit 16 Jahren eine ganz eigenartige Kegelschnittlehre auszuarbeiten, die die Bewunderung auch von Descartes erregte. Von dieser Schrift wurde nur ein Entwurf *Essay pour les Coniques* (Paris 1640) in Form eines kleinen Plakates gedruckt, der den Pascalschen Lehrsatz noch in einer älteren Form enthielt. Daß Pascal später den Satz selbst in die heutige Form brachte, weiß man durch Leibniz, dem die Handschrift des größeren Werkes, die seitdem ganz verloren ging, noch vorlag.

Auch La Hire versuchte auf der Desarguesschen Grundlage eine Kegelschnittlehre aufzubauen. Aber die tieferen Gedanken des Meisters waren ihm nicht aufgegangen. Nur die Zentralprojektion und die harmonischen Eigenschaften spielen in seiner *Nouvelle méthode en géométrie* (Paris 1673) und in den wesentlich verbesserten *Sectiones conicae* (Paris 1685) eine Rolle. Ein Anhang mit dem Titel *Planiconiques*, den er der *Nouvelle méthode* etwas später anheften ließ, gibt die erste Darstellung der zentralperspektivischen Abbildung in einer Ebene, zu der Stevin (s. o. S. 91) nur einen Anlauf genommen hatte. Eine größere Wirkung hatten aber auch La Hires Bücher nicht. Vollkommen verloren sind Desargues' Arbeiten über Epi- und Hypozykloiden, auf die La Hire in der ersten zusammenfassenden Abhandlung über solche Kurven (Paris Mém. 1666/99; veröff. 1730) hinweist.

### E. Die Algebra der neuen Zeit.

Mit Descartes' *Géométrie* (1637; s. o. S. 116), die selbst zu einem großen Teile rein algebraisch ist, war die Algebra statt der Geometrie an die Spitze der Mathematik getreten. Diese Tatsache, die Descartes in ihrer Wichtigkeit gewiß deutlich war, kam zwar nicht sofort allen Mathematikern zum vollen Bewußtsein, begann sich aber doch bei seinen Nachfolgern immer mehr auszuwirken. Was bei Descartes in der Form noch fehlte, Wurzelexponenten, allgemeine Buchstabenexponenten und das Recordesche Gleichheitszeichen (s. o. S. 79), führten Wallis und Newton bald darauf ein (vgl. o. S. 110). Wirklich bereichert hat Descartes die Algebra selbst nicht nur durch seine sehr geschickten graphischen Lösungen (s. o. S. 119), sondern auch durch die nach ihm benannte Zeichenregel (ohne Beweis), von der schon Cardano (s. o. S. 81) einige Vorstellung hatte, und durch

eine ganz neue Lösung der Gleichungen vierten Grades durch Zerlegung in zwei quadratische Faktoren mittels der von ihm selbst erfundenen Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Fermat verdankt man ein Verfahren zur Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen desselben Grades, ein anderes Leibniz. Huygens und Johann Hudde, später Bürgermeister von Amsterdam, teilten brieflich Schooten 1655 bzw. 1657 im Wesen übereinstimmende Lösungen der kubischen Gleichungen mit, die zu der Formel del Ferros (s. o. S. 81) führten. In dem Briefe Huddes, der 1659 in Descartes' *Geometria* (s. o. S. 117) abgedruckt wurde, ist zu gleicher Zeit der wichtige Schritt getan, daß ein allgemeiner Gleichungskoeffizient auch negativ gedacht wurde. Das Verfahren, Doppel- und mehrfache Wurzeln zu bestimmen, stammt gleichfalls von Hudde. Im gleichen Jahre 1657 gab Wallis zu Oxford eine *Mathesis universalis* heraus, wo er sich u. a. mit der Verwandlung von gemeinen in Dezimalbrüche (und umgekehrt) befaßte. Die Lehre von den Näherungswerten der arithmetischen Kettenbrüche hatte er schon in der *Arithm. inf.* (1656; s. o. S. 106) gefördert, wie auch Huygens († 1695) in einer Abhandlung über ein Planetarium, die erst aus seinem Nachlaß veröffentlicht wurde. Aus der umfangreichen *Algebra* von Wallis erwähnen wir den Versuch einer geometrischen Darstellung der imaginären Zahlen, deren Name von Descartes herrührt.

Das Zahlenrechnen wurde, abgesehen von den Logarithmen, auch durch die Herausgabe von Prim- und Quadratzahltafeln gefördert. Seth Partridge gab 1662 dem Oughtredschen Rechenschieber (s. o. S. 86) die heutige Form, indem er die gleitende Zunge einführte. Die erste wirkliche Rechenmaschine hat wohl Pascal

konstruiert (um 1642), und auch Leibniz erdachte eine solche (1671/73). Es gelang aber den Mechanikern der Zeit nicht, sie zum Gehen zu bringen. Mit der von Leibniz geschah dies in der allerneuesten Zeit. Leibniz verdankt die Mathematik auch den Multiplikationspunkt und den Divisionsdoppelpunkt, die er in seinen Handschriften von 1693 bzw. 1684 an anwandte und die im 18. Jahrhundert sich allgemeiner verbreiteten. Die Bezeichnungsweise der Indizes, die besonders Schooten (1649; s. o. S. 117) vorher angewandt hatte, verwendete Leibniz bei seinen handschriftlichen Versuchen in vielfacher Abänderung. Diese Bezeichnung führte ihn bei Lösung dreier linearen Gleichungen zur Aufstellung des Determinantenschemas. Auch die Behandlung transzendenter Gleichungen regte Leibniz in Briefen von 1677 an öfters an. Die Versuche Gleichungen von höherem als dem vierten Grad zu lösen, denen auch Leibniz nicht fernstand, führten dessen Freund Ehrenfried Walter Graf von Tschirnhaus, den späteren Erfinder des Porzellans, zu der noch heute nach ihm benannten Transformationsmethode, die wenigstens eine neue Lösung der kubischen Gleichung ergab.

Newton hielt in Cambridge von 1673—1683 Vorlesungen über Algebra, die allerdings erst 1707 unter dem Titel *Arithmetica universalis* herausgegeben wurden. Sie enthalten u. a. die rekurrenten Formeln über die Potenzsummen der Wurzeln und Angaben über die Grenzen der Gleichungswurzeln. Die Descartessche Zeichenregel suchte Newton auch auf komplexe Wurzeln auszudehnen und die Zerfällung von Gleichungen hat er wenigstens für lineare Faktoren erledigt. Seine Eliminationsmethode stimmt mit der von Fermat und Johann Hudde (1659; s. o. S. 124) im Wesen überein, ist aber heute nach Euler benannt (s. 2. Bdch.). Wallis'

*Algebra* von 1685 (lat. 1693; s. o. S. 110) gab das Gesamtwissen der Zeit wieder und wurde viel gelesen. Dort wurde auch zum erstenmal die Newtonsche Näherungsmethode veröffentlicht, die auf der Reihenentwicklung (um 1669) beruht und deren Anwendung im Jahre 1676 durch das „Newtonsche Parallelogramm“ sehr erleichtert worden war. Ihre heutige Form verdankt sie Jos. Raphson (*Analysis aequationum*; London 1697).

Ein eigenartiges Werk war der *Traité d'algèbre* (1690) des Pariser Akademikers Michel Rolle. Bei ihm findet sich zum erstenmal der Satz, daß jede $n^{te}$ Wurzel $n$ Werte hat, wirklich ausgesprochen. Erledigt wurden allerdings zunächst nur die dritten Einheitswurzeln. Den Ausdruck $x^4 + a^4$ zerlegte erst Leibniz (Acta Erud. 1702) in seine vier Faktoren. Vermittels des Huddeschen Satzes über die Doppelwurzeln (s. o. S. 124) hat Rolle die Einschließung der Gleichungslösungen zwischen Grenzen wesentlich verfeinert. Die ganzzahlige Lösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades gab er in der heute in den Schulen noch meist üblichen Form, die später Euler wieder fand.

Wir schließen hier auch die Fächer an, die der Algebra nahe stehen. Die Zahlentheorie nahm durch Fermat einen ungeheuren Aufschwung, der aber zu keiner Schule führte, da Fermat nur Ergebnisse mitteilte, die vielfach erst viel später bewiesen wurden. Zum Teil fanden sich diese Resultate erst nach seinem Tode in Randnoten zu seinem Handexemplar der Bachetschen Diophantausgabe (s. o. S. 87). Ein anderer Teil wurde von dem Jesuiten Jacques de Billy bearbeitet und mit den vorigen in der durch Fermats Sohn 1670 veranstalteten Diophantausgabe veröffentlicht. Vieles ist noch verstreut im Briefwechsel und in den *Varia Opera* (1679). Den sog. kleinen Fermatschen Satz, $a^m \equiv 1 \pmod p$,

wo $p$ eine Primzahl und $p \equiv 1 \pmod{m}$ ist, fand er schon 1640 (Leibniz später selbständig, spätestens 1683). Ganz von den Indern unabhängig griff Fermat die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ an, die später von Euler zu Unrecht nach John Pell († 1685) benannt wurde. Von mehreren Unmöglichkeitssätzen führen wir nur noch das „große Fermatsche Theorem" an, daß $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht lösbar ist. Für diesen Satz, der sehr wahrscheinlich richtig ist (Fermat hat auch einige falsche Behauptungen aufgestellt), wollte er einen „wahrhaft wunderbaren Beweis" gefunden haben. Bis heute wurde aber ein solcher trotz der Bemühungen der bedeutendsten Mathematiker nicht gefunden. Von Fermat selbst kennen wir nur den Beweis für $n = 4$.

Außer de Billy, der auch selber Werke über Diophantische Aufgaben (1660 u. 1670) herausgab, ist von Fermats Korrespondenten vor allem noch der Jurist Frénicle de Bessy zu nennen, der über rationale rechtwinklige Dreiecke (1676) und über magische Quadrate (veröff. 1693) und Kombinationslehre (1693) schrieb. Auch Pascal stand in Briefwechsel mit Fermat, und ihm verdankt man zwei kleine zahlentheoretische Abhandlungen (verf. um 1654; veröff. 1665 im *Traité du triangle arithmétique* zu Paris). Die eine ist nicht unwichtig und bezieht sich auf faktorielle Sätze. Pascal erkannte die Binomialkoeffizienten als Kombinationszahlen. Dieselbe Erkenntnis besaßen Pascal und Fermat bereits von den Vieleckszahlen. Wissenschaftlich festzulegen versuchte die Kombinatorik erst Leibniz durch die Jugendarbeit *Dissertatio de arte combinatoria* (Leipzig 1668). Zum polynomischen Lehrsatz gelangte Leibniz im Jahre 1678. Veröffentlicht wurde er zuerst durch den französischen Emigranten Abraham de Moivre (1697 u. 1698 zu London).

Gleichzeitig wurde von Pascal und Fermat in ihrem Briefwechsel auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung eigentlich erst begründet (vgl. o. S. 82). Huygens hörte davon und schrieb die erste selbständige Schrift darüber *De ratiociniis in ludo aleae*, die Schootens *Exercit. math.* (1657; s. o. S. 116) angehängt wurde. Auch der spanische Jesuit Juan Caramuel y Lobkowitz behandelte in einem Buche *Mathesis biceps* (Campania 1670) Spiel- und Wettfragen mittels Kombinatorik und Frénicle de Bessy gab in seiner Kombinationslehre eine wohl unabhängige Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Anwendung fanden Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen auch in der Konstruktion von Sterblichkeitstafeln zur Berechnung von Leibrenten. Vollkommen durchgerechnete Zinseszinstabellen gab es schon im 14. Jahrhundert in Italien. Die ältesten bekannten sind in dem *Libro di divisamenti di paesi e di misure di mercatanzie* von Franc. Balducci Pegolotti aus Florenz enthalten (1350; gedr. erst durch Pagnini *Della decima . . . e della mercatura*, Lisbona und Lucca 1766). Die ersten im Druck erschienenen sind wohl die von Stevin in seiner *Practique d'arithmétique* (1585; s. o. S. 83) veröffentlichten. Die erste Zusammenstellung der noch heute üblichen Formeln, auch zur Rentenrechnung, machte Oughtred in einem Anhange seiner *Clavis* (von der 2. Aufl. 1648 an; s. o. S. 86). Mit Sterblichkeitstafeln beschäftigten sich zuerst Huygens (1669, brieflich) und de Witt in einer Schrift von 1671. Grundlegend ist hier aber der Aufsatz des Astronomen Edmund Halley in den Philos. Transactions für 1690/93. Auch eine Schrift *Of compound interest*, die Logarithmentafeln beigegeben wurde, schrieb Halley. Über den Barwert war sich schon Oughtred völlig klar. Die Frage des Rabattes erörterte Leibniz in den Acta Erud. von 1683. Für Augenblicksverzinsung gab

Jak. Bernoulli in den Act. Erud. von 1690 (ohne Ableitung) die richtige Reihenentwicklung an.

Ein anderes, etwas abseits liegendes Gebiet sei auch noch erwähnt, das der Zahlensysteme auf verschiedener Basis. Schon von Leonardo von Pisa (1228; s. o. S. 63) und Pacioli (1494; s. o. S. 72) gelegentlich verwendet, fand das Zweiersystem, dem später auch Leibniz große Aufmerksamkeit schenkte, durch Neper in einem Anhang zu seiner „Stäbchenrechnung" (*Rabdologia*, Edinb. 1617) eine systematische Darstellung. Wallis hat in seiner *Mathesis univ.* (1657; s. o. S. 124) auch andere Grundzahlen in Betracht gezogen, ebenso Pascal in der zweiten der im Jahre 1654 verfaßten Abhandlungen (s. o. S. 127) und Caramuel y Lobkowitz in dem 1670 (s. o. S. 128) herausgegebenen Buche. Die beiden letzteren wiesen besonders auf den Nutzen eines Zwölfersystems hin.

### F. Geometrisch-trigonometrische Nachlese.

In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhundert wurde die Herausgabe erhaltener griechischer Klassiker und die Wiederherstellung verlorener Schriften immer noch fortgesetzt (vgl. o. S. 75). Wir wollen nur die Bearbeitung der (verlorenen) „Ebenen Örter" des Apollonios durch Fermat erwähnen (veröff. erst 1679; s. o. S. 107), weil er durch sie offenbar zur Einführung von Koordinaten angeregt wurde. Von Euklids Lehrgang sich befreiende Lehrbücher der Elementargeometrie (vgl. o. S. 91) erschienen zuerst in Frankreich. Zu den ersten gehören die des Jansenisten Antoine Arnauld (1667), des Jesuiten Gaston Pardies (1671) und des Oratorianers Bernard Lamy (Paris 1667 u. öfter). Bei Pardies findet sich (bis jetzt) zuerst im Abendlande der Satz von den Kreismöndchen (vgl. o. S. 52). Neue Sätze der ebenen Geometrie sind in Giov. Cevas *De lineis se invicem secantibus* (Mai-

land 1678) enthalten. Descartes entdeckte bereits um 1620 die Beziehung zwischen den Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen eines einfachen Polyeders, die heute nach Euler benannt wird (vgl. das 2. Bändchen), weil sie unterdessen in Vergessenheit gekommen war.

Die Trigonometrie, die wir mit dem Abschluß der Einführung der Logarithmen verließen (s. S. 103), machte mehr Fortschritte als die Elementargeometrie. Vor allem wurde auch in ihr allmählich die algebraische Schreibweise eingeführt und die Proportionen durch Gleichungen ersetzt. Schon Girard verwendete eine Symbolik in seinen Tafeln von 1626 (s. o. S. 93), und Hérigone ging in seinem *Cours* (1634; s. o. S. 84) noch weiter. Dann aber wurde die formelmäßige Darstellung in England stark gefördert. Dort war es Oughtred (s. o. S. 86) mit einer *Trigonometria* (London 1657), dem ein ähnliches von seinem Schüler Seth Ward, dem späteren Bischof, schon 1654 vorausgegangen war. Bei Oughtred finden sich die ersten (geometrischen) Beweise der Neperschen Analogien, deren analytische Ableitung erst der Pfarrer John Newton in seiner *Trigonometria britannica* (London 1656/58) gab. J. Newton gebrauchte die Namen Kosinus und Kotangens zum erstenmal ständig. Eine viel beachtete, zusammenfassende Darstellung der ganzen Trigonometrie gab der Astronom Vincent Wing im zweiten Buch seiner *Astronomia britannica* (London 1669). Wallis, der gleichfalls zu Oughtreds Schülern zählte, hängte seiner *Algebra* von 1685 eine trigonometrische Abhandlung über „Winkelschnitte" (s. o. S. 98) an; daran anschließend machte Wallis' Schüler John Caswell, später Professor der Astronomie, einen bedeutenden Schritt in der Algebraisierung. Seine Schrift wurde gleichfalls der Wallisschen *Algebra* angehängt. Bei Wallis findet sich schon 1670, im zweiten Teil der

*Mechanica*, die Sinuslinie für zwei volle Umläufe ganz richtig gezeichnet. Bei den anderen trigonometrischen Linien herrschte aber im 17. Jahrh. noch große Unsicherheit über die Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten und von den zugehörigen Kurven wurden nur Stücke gezeichnet.

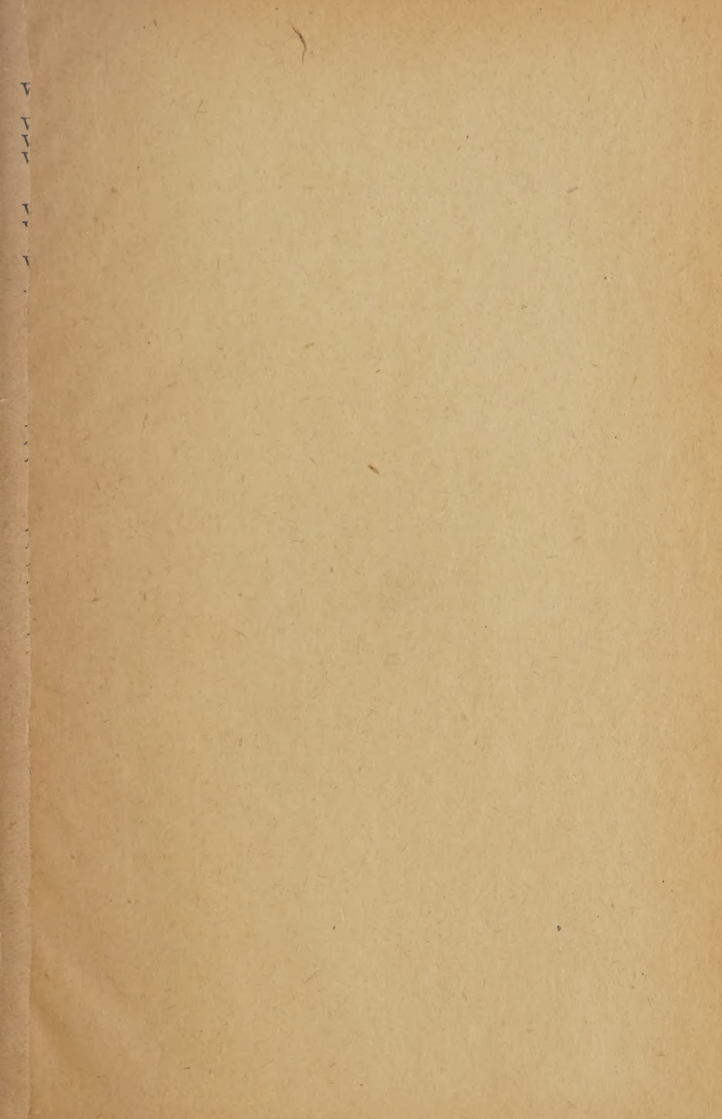
Den unendlichen Reihen für die trigonometrischen Funktionen, die der Infinitesimalrechnung entsprangen (s. o. S. 333), folgten jetzt auch die allgemeinen Entwicklungen für $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, als Erweiterungen der früheren Untersuchungen über „Winkelschnitte" (s. o. S. 130). Die erste derartige Formel gab I. Newton in einem Brief an Leibniz vom Jahre 1676, zu der Moivre (Phil. Trans. 1698) einen neuen Beweis fand. Es folgten Joh. und Jak. Bernoulli (Act. Er. 1701; Paris Mém. 1702). Für Tangens und Sekans gab erst der Akademiker Thomas Fantet de Lagny (Mém. Paris 1705) die allgemeinen Regeln in Worten, Jak. Hermann, ein Schüler Jak. Bernoullis, in formelmäßiger Darstellung (Act. Erud. 1706).

---

# Namen-Index.

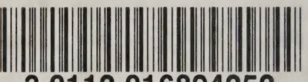
---

# Sach-Index.











VWV